DER INTEGRIRENDE FACTOR UND DIE PARTICULAREN INTEGRALE: MIT...

Aloys Mayr

DER INTEGRIRENDE FACTOR

PARTICULAREN INTEGRALE

MIT BESONDERER ANWENDUNG AUF DIE LINEAREN
DIFFERENZIAL-GLEICHUNGEN,

PROLEGOMENA

ZUR THEORIE DER INTEGRATION.

VON

Dr. ALOYS MAYR,

ÖFF. ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK UND ASTRONOMIE AN DER
K. JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU WÜRZBURG.

WÜRZBURG.
JULIUS KELLNER'S BUCHHANDLUNG.
1868.

καλόν γε τὸν πόνον, ὦ
Φοῖβέ, σοι πρὸ δόμων λατρεύω,
τιμῶν μαντεῖον ἕδραν·

Eurip. Jon. 127—130.

Druck von F. E. Thein in Würzburg.

Vorrede.

Da die vorliegenden Prolegomena selbst nur eine Vorrede zur künftigen Theorie der Integration sind, und alles enthalten, was darüber zu sagen ist, so kann ich mich hier kurz fassen.

Nachdem ich den Differenzial-Calcul durch den Beweis, dass die Differenzialien endliche Grössen sind, und als solche gebraucht werden, wissenschaftlich zu gestalten unternommen hatte, ging ich zu den Variationen über, und habe sie als gewöhnliche partielle Differenzialien, und ihre Theorie als Theorie der partiellen Maxima und Minima festgestellt. Nun blieb noch der Integral-Calcul übrig; es war zu untersuchen, ob ihm eine neue wissenschaftliche Seite abzugewinnen sei, oder nicht. Das Ergebniss war, dass es allerdings möglich ist, diesen Calcul, mehr als bisher, vollkommen systematisch durchzuführen, und dass die nothwendigen Hilfsmittel dazu vorhanden sind; diess ist als Resultat in den nachfolgenden Untersuchungen niedergelegt.

Auf keinen Theil menschlicher Wissenschaft können wir mit so grosser Befriedigung und mit so gerechtem Stolze blicken, wie auf den Integral-Calcul, was die Reihe der hervorragenden Forscher betrifft, die seit zwei Jahrhunderten ihre Thätigkeit und uneigennützige Hingabe dem Dienste

der Wahrheit gewidmet haben, darüber ist nur eine Stimme; was aber den Erfolg betrifft, so kann man verschiedener Meinung sein. Während Einige Alles vorzüglich und unübertrefflich finden, und der Wissenschaft der Integration, weil sie die erhabenste ist, auch den erhabensten Inhalt zusprechen, finden Andere, die nüchterner urtheilen, zwar Vieles bewunderungswürdig, aber nur in vereinzelnten, hervorragenden Punkten; hingegen scheint ihnen die Wissenschaft als Ganzes den fast unangreifbaren Problemen gegenüber ziemlich hilflos zu sein. So weit können die Urtheile über eine und dieselbe Sache auseinandergehen. Darum hielt ich es der Mühe werth, zu untersuchen, was hier überhaupt geleistet werden könne. Aehnliche Gedanken und Untersuchungen werden sich Allen aufdrängen, denen die Wahrheit am Herzen liegt. Mögen sie ihre Kräfte erproben; die Bahn ist geöffnet.

Ich war bemüht, überall guten Samen auszustreuen; möge er auf gutes Erdreich fallen und hundertfältige Frucht bringen.

Würzburg, 12. Juli 1868.

Der Verfasser.

I.
Einleitung.

§ 1.

Jede Wissenschaft hat zwei scharf unterscheidbare Theile, einen allgemeinen und einen besondern. Der erste, der auch der elementare Theil genannt werden kann, soll Allgemeines enthalten, alle Lehrsätze, die für die speciellen Untersuchungen unentbehrlich sind; während der zweite Theil, der die speciellen Untersuchungen selbst umfasst, Specielles enthalten soll, Lehrsätze, die ihren Zweck in sich selbst haben, in der Erforschung ihrer speciellen Wahrheit, die aber, so glänzend und wichtig sie auch sein mögen, weder für die allgemeinen noch für die andern speciellen Untersuchungen unbedingt nothwendig sind.

Der erste Theil umfasst den allgemeinen Lehrstoff jeder Wissenschaft; der zweite Theil enthält Untersuchungen, die an sich sehr werthvoll sein können, die aber mehr dem Gesammt-Schatz der Wissenschaft, als der allgemeinen und lehrbaren Theorie angehören.

Unterlässt man die Unterscheidung dieser wesentlich verschiedenen Bestandtheile einer Wissenschaft, dann geht Alles ins Unendliche und Unbestimmbare, man verliert den Ueberblick und verzichtet auf Abrundung und Vollendung des Systems; denn die speciellen Untersuchungen gehen ihrer Natur nach ins Unendliche und sind schlechterdings niemals zu erschöpfen.

Möge nun aber auch das Specielle in's Unendliche gehen, der allgemeine Theil, die systematische Wissenschaft, die in

letzter Entwicklung in der durchsichtig gewordenen und inhaltsreichen Methode besteht, ist doch nur endlich, übersichtlich und abschliessbar, und erzeugt in allen zur Forschung Berufenen die Befähigung zu jeder speciellen Untersuchung, sie möge kommen, woher sie wolle; und diess ist Alles, was von einer vollkommenen Wissenschaft gefordert und auch erwartet werden kann.

Die speciellen Untersuchungen werden dann besonders werthvoll, wenn sie Resultate zu Tage fördern, die dem allgemein systematischen Theile dienen, und die ohne sie vielleicht schwer oder gar nicht gefunden worden wären. Und so gehen denn beide, das Allgemeine und das Specielle, Hand in Hand, da eine jede gründlich durchgeführte Untersuchung selten ohne Einfluss auf die allgemeine Theorie bleibt, sie theils erweiternd, theils abkürzend und vereinfachend.

§ 2.

Vom Integral-Calcul kann man sagen, dass in neuerer Zeit in ihm vornehmlich die speciellen Untersuchungen über neue Transcendenten geglänzt haben, mehr als das Allgemeine, das fast unbewegt blieb, obgleich es wichtiger und folgenreicher ist, als das Specielle.

Nicht, dass nicht auch über die allgemeine Theorie geforscht worden wäre; allein trotz der schönen aus den speciellen Untersuchungen herübergenommenen Integrations-Methoden, trotz des von Petzval eingeleiteten Fortschritts in den linearen Differenzial-Gleichungen, ist doch die allgemeine Theorie im Grossen und Ganzen nicht in beharrlich fortschreitende Bewegung gekommen.

Man muss nun entweder eingestehen, dass in der allgemeinen Theorie der Differenzial-Gleichungen, was ihre geschlossenen Ausdrücke anbelangt, nichts Allgemeines weiter geleistet werden kann, oder dass man in diesen Untersuchungen bei einen Punkt angelangt ist, über den man mit den vorhandenen Mitteln nicht hinauskommen kann, ohne dadurch gerade einzuräumen, dass es nicht dennoch neue Hilfsmittel geben könne, durch die man die Schwierigkeiten der Integration

der Differenzial-Gleichungen überwindet, nur vielleicht auf andere Weise, als bisher angestrebt war. Ob das Eine oder das Andere der Fall ist, soll eben Resultat dieser Unsersuchung sein.

§ 3.

Dass der allgemeine systematische Theil des Integral-Calculs noch Lücken habe, kann Niemand verkennen, der sich etwas in demselben umgesehen hat. Schon der erste Theil, die Integration der Differenzial-Ausdrücke, und zwar schon die algebraischen Differenzial-Ausdrücke decken solche Lücken auf.

Euler behandelt in seinem Integral-Calcul I. Abschnitt, 2. Cap. die Aufgabe: Die Fälle zu bestimmen, in denen der Differenzial-Ausdruck: $dy = x^{m-1}\,dx\,(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$; rational gemacht werden kann, und findet durch zwei Substitutionsformeln:

$$1)\ a + bx^n = z^\nu\,; \qquad 2)\ a + bx^n = x^n z^\nu$$

zwei Auflösungen, wenn entweder $\frac{m}{n}$ oder aber $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl geben. Ist diess der Fall, dann können die Differenzialien $x^{m-1}dx\,(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ entweder algebraisch, oder durch Logarithmen und Bogen integrirt werden; wenn nicht, dann können sie nicht durch diese elementaren Functionen integrirt werden, dann muss man, wenn man geschlossene Ausdrücke will, neue transcendente Functionen herstellen.

Es ist demnach von grosser Wichtigkeit, bestimmt zu wissen, ob es bloss diese zwei oder noch mehrere Substitutionsformeln giebt. Gäbe es nämlich mehrere solche Substitutionsformeln, so könnten auch mehrere Differenzialien von der Form: $x^{m-1}dx\,(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ elementar integrirt werden.

Euler setzt zwar sogleich hinzu: „Ein wenig Ueberlegung zeigt die Unmöglichkeit, andere Substitutionen zu finden, die der Aufgabe entsprechen", d. h. die das gegebene Differenzial

rational machen. Dieser Zusatz mag dahingestellt bleiben, er ist aber jedenfalls, wenn er als Beweis gelten soll, als solcher nicht bindend. Man hätte doch den Beweis dieser Unmöglichkeit wenigstens versuchen sollen, bloss ein wenig Ueberlegung reicht dazu nicht hin.

Es besteht wirklich eine dritte Substitutionsformel, die zudem nicht schwer aufzustellen ist, und es kann ferner leicht bewiesen werden, dass nur diese drei und nicht mehr Substitutionsformeln möglich sind, wodurch einerseits dieser Abschnitt wissenschaftlich abgerundet, und andrerseits die Zahl der neuen Functionen um den dritten Theil vermindert wird.

Doch übergehen wir diess, da es keinen Bezug auf die gegenwärtige Untersuchung hat.

Finden sich nun schon Lücken sogleich am Anfange der leichten Theorie der Differenzial-Ausdrücke, so ist mit Grund zu vermuthen, dass in der schwierigen Theorie der Differenzial-Gleichungen derlei Fälle öfter vorkommen werden.

§ 4.

Um eine systematische Uebersicht vorauszuschicken, erläutere ich, dass im ersten Abschnitt des Integral-Calculs die Integrationen der Differenzial-Ausdrücke zweier Veränderlicher behandelt werden, solcher Ausdrücke, in denen das Differenzial der einen Veränderlichen getrennt und für sich allein auf einer Seite der Gleichung steht, während auf der andern irgend eine Function der andern Veränderlichen mit ihrem Differenzial enthalten ist, z. B. $dy = fxdx$; wo fx was immer für eine Function von x bezeichnen möge.

Der zweite Abschnitt umfasst die Integration der partiellen Differenzial-Ausdrücke, in denen das Differenzial einer Veränderlichen auf einer Seite der Gleichung steht, aber bloss partiell differenzirt nach der einen oder andern Veränderlichen, während die andere Seite der Gleichung bloss das Differenzial einer dieser Veränderlichen enthält, verbunden mit irgend einer Function der gegebenen Veränderlichen, z. B. $\frac{\partial z}{\partial x} \partial x = f(x, y) \partial x$

Diese partiellen Differenzial-Ausdrücke werden gerade so integrirt, wie die vorhergehenden totalen Differenzial-Ausdrücke einer Veränderlichen, nur mit dem Unterschiede, dass statt der Constante eine willkührliche Function der andern Veränderlichen, nach welcher **nicht** differenzirt worden war, dem Integral zugefügt wird, wie hinlänglich bekannt ist. So wird z. B. aus

$$\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = \frac{x\partial x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

durch Integration gefunden: $z = \sqrt{x^2+y^2} + fy$.

Oder aus $\frac{\partial z}{\partial y}\partial y = \frac{y\partial y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ wird gefunden: $z = \sqrt{x^2+y^2} + fx$.

Gewöhnlich werden solche Ausdrücke erst **nach** der Theorie der Differenzial-Gleichungen zweier Veränderlicher behandelt; aber es erscheint systematischer, wenn sie ihnen vorausgehen. Denn da sie dasselbe Schema der Integration haben, wie die Ausdrücke des ersten Abschnittes, und eben so leicht, wie diese zu integriren sind, und da ihre Resultate in der Theorie der totalen Differenzial-Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen vorausgesetzt werden müssen, so sind sie ihnen auch systematisch voranzustellen, um so mehr als sie von den Resultaten der Integration der Differenzial-Gleichungen völlig unabhängig sind.

Nach diesen zwei Abschnitten kommen zwei andere, die von den **totalen** und den **partiellen** Differenzial-**Gleichungen** zweier oder mehrerer Veränderlicher handeln, in denen die Veränderlichen und ihre Differenzialien jeder Ordnung **ungetrennt** und in beliebiger Verbindung enthalten sind. Der Integral-Calcul trennt sich demnach in zwei grosse Abtheilungen nach dem Unterschiede der Differenzial-**Ausdrücke** und der Differenzial-**Gleichungen**. Die weitere Gliederung in kleinere Unterabtheilungen kann übergangen werden.

§ 5.

Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich auf die totalen Differenzial-Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen

und ihrer Differenzialien; sie setzen daher die beiden Abschnitte der totalen und partiellen Differenzial-Ausdrücke voraus, d. h. ihre Aufgaben werden als gelöst betrachtet, sobald die gegebenen Gleichungen auf die totalen oder partiellen integrirbaren Differenzial-Ausdrücke zurückgeführt sind.

Wenn die Differenzial-Ausdrücke, trotz der Trennung der Veränderlichen, für sich nicht integrirbar sind, wie z. B. $\frac{d^2y}{y}$, so bleibt ihre Integration Gegenstand der Differenzial-Gleichungen. So sind z. B. die Differenzial-Ausdrücke ydy, yd^3y, yd^5y, überhaupt $yd^{2n+1}y$ für sich integrirbar, nicht aber yd^2y, yd^4y, .. $yd^{2n}y$.

Bei so schwierigen Problemen, wie die der Differenzial-Gleichungen sind, hat man alle Ursache, alle Hilfsmittel in Betracht zu ziehen. Darum werden durch die Methode der Integration mittelst des integrirenden Factors die übrigen Integrations-Methoden nicht ausgeschlossen, wenn auch die gegenwärtige Untersuchung nur von der Integration durch den integrirenden Factor und durch die particularen Integrale handelt.

Es ist fast überflüssig, zu bemerken, dass sich diese Untersuchungen nicht auf das Specielle, sondern auf das allgemeine und systematische Ganze des Integral-Calculs beziehen. Es soll erörtert und in gedrängter Uebersicht zusammengestellt werden, was durch allgemeine Integration erreichbar ist, und was nicht. Und darüber ins Reine zu kommen, dürfte sich wohl der Mühe lohnen.

II.

Das Criterium der Integrabilität.

§ 6.

Die Differenzial-Gleichungen entstehen durch Differenzirung von Stamm-Gleichungen oder von Differenzial-Gleichungen niederen Grades. Sie bleiben nach der Differenzirung entweder unverändert, oder sie werden durch Ausfallen eines gemeinschaftlichen Factors, oder durch beliebige aber gültige Substitutionen der Veränderlichen und ihrer Differenzialien umgestaltet, und gehören dennoch zur nämlichen Stamm-Gleichung. So entsteht z. B. aus $x^3y^2 - a^5 = 0$ durch Differenzirung: $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$, aber auch: $3ydx + 2xdy = 0$, und durch die Substitution von $y = a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}$ erfolgt auch die Gleichung:

$$3a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{5}{2}}dx + 2dy = 0.$$

Wird dann z. B. $3ydx + 2xdy = 0$ aufs Neue differenzirt, so entsteht: $2xd^2y + 5dydx = 0$. Wird nun der Coefficient 5 in $\alpha + (5 - \alpha)$ zerlegt, und $dy = -\frac{3ydx}{2x}$ substituirt, so entsteht: $d^2y + \frac{\alpha}{2x}dxdy - \frac{3(5-\alpha)}{4x^2}ydx^2 = 0$, eine Gleichung, die ziemlich umgestaltet ist, und doch die Stamm-Gleichung: $x^3y^2 - a^5 = 0$ zum partikularen Integrale hat.

Dasselbe ist der Fall, wenn solche Gleichungen aus Reductionen partieller Differenzial-Gleichungen oder aus unmittel-

barer Aufnahme der arithmetischen, geometrischen und mechanischen Probleme gebildet werden.

Durch ähnliche Substitutionen und Reductionen kann eine und dieselbe Stamm-Function zu vielfach verschiedenen Differenzial-Gleichungen umgestaltet werden, und doch allen als ein partikulares Integral angehören.

Die durch Substitutionen umgebildeten Differenzial-Gleichungen sind die wichtigsten, denn sie sind durch die Natur der Probleme selbst gegeben, da alle aus Geometrie und Mechanik wirklich gebildeten Gleichungen, der Natur der Aufgaben gemäss, Bogen, Fläche, Körper, Schwerpunkt, Geschwindigkeit, Kraft, Wellenlänge &c. enthalten, die bekanntlich nicht durch sich selbst, sondern nur durch die ihnen entsprechenden Differenzial-Ausdrücke gegeben werden können. So giebt es bekanntlich keine allgemeine Function des Bogens, wohl aber den Integral-Ausdruck: Bogen $= \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$, der also statt des Bogens zu substituiren ist. Dasselbe gilt von allen andern Functionen, so dass in den auf diese Art gebildeten Gleichungen wider Wissen und Willen schon Substitutionen der Veränderlichen und ihrer Differenziale eintreten, während ihre Stamm-Gleichungen selbst noch unbekannt sind und erst gefunden werden sollen. Die Schwierigkeiten der Integration der Differenzial-Gleichungen beziehen sich auf solche umgestaltete Gleichungen, während die nach ihrer Differenzirung unverändert gebliebenen Differenzial-Gleichungen leicht sind, und nur der Uebung und Schule willen behandelt werden.

§ 7.

Die Differenzial-Gleichungen des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen haben die Form: $Pdx + Qdy = 0$; sie bestehen aus zwei Gliedern; deren eines dx und das andere dy zum Factor hat, während die Grössen P und Q beliebige Functionen von x und y sein können.

Das bekannte Criterium der Integrabilität dieser Gleichungen ist, dass $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist, nämlich, dass das partielle Differenzial

von P nach y gleich ist dem partiellen Differenzial von Q nach x. Dieses von grossen Analysten aufgestellte, und unzweifelhaft richtige Criterium der Integrabilität der Differenzial-Gleichungen übergehen wir, nicht weil es etwa bei seiner Verwendung zur Auffindung des integrirenden Factors auf Differenzial-Gleichungen führt, die schwieriger zu integriren sind, als die gegebene Gleichung selbst, sondern vielmehr desswegen, weil es seiner Natur nach nur auf Differenzial-Gleichungen des ersten Grades anwendbar ist, während doch die Differenzial-Gleichungen des zweiten und der höheren Grade wenigstens eben so wichtig sind, wie die des ersten Grades.

§ 8.

In den schönen Untersuchungen Euler's über die Variations-Rechnung kam dieser grosse Analyst auf ein anderes und wichtigeres Criterium der Integrabilität der Differenzial-Gleichungen, das in Folgendem besteht:

Ist $d^n V = 0$ eine totale Differenzial-Gleichung des n Grades, zwischen x und y und ihren Differenzialien, wobei dx als constant genommen wird und wird $d^n V = 0$ partiell nach y differenzirt, wird also $\frac{\partial d^n V}{\partial y}\partial y = 0$ gebildet, so gliedert sich die so gebildete partielle Differenzial-Gleichung in eine endliche Reihe von Grössen, welche successiv die Differenzialien: ∂y, ∂dy, $\partial d^2 y$ &c. zu Factoren haben. Werden die Coefficienten dieser Factoren nach Euler mit $N, P, Q, R, S\ldots$ bezeichnet, so geht die Gleichung hervor:

$$\frac{\partial d^n V}{\partial y}\partial y = N\partial y + P\partial dy + Q\partial d^2 y + R\partial d^3 y + \ldots = 0\,;$$

und findet zwischen diesen Coefficienten die Gleichung statt:

$$N - dP + d^2 Q - d^3 R + \ldots = 0,$$

so ist die gegebene Differenzial-Gleichung des n^{ten} Grades unmittelbar zu integriren und sogleich auf eine Gleichung des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zurückzubringen.

Euler beweist diesen allerdings ganz richtigen Satz aus etwas fremdartigen Voraussetzungen seiner Variations-Rechnung,

setzt übrigens hinzu: „Dieser Beweis ist allerdings ein eigenthümlicher, da er aus der Lehre der Variationen genommen ist, allein man hat kaum einen anderen Weg, auf dem sich dieser Satz beweisen lässt.“ Und am Ende des Abschnittes, in welchem er von diesem Satze handelt, kommt er noch einmal auf ihn mit den Worten zurück: „Diese abgeleiteten Lehrsätze sind um so schöner, als sich der Beweis derselben auf ein Prinzip stützt, dessen Grund hier ganz fremdartig erscheint, besonders weil bei diesen Wahrheiten keine Spur mehr von Variationen zu finden ist. Es unterliegt daher keinem Zweifel, dass der Beweis auch auf eine andere mehr natürliche Weise durchgeführt werden könne.“

Es ist nun allerdings oft versucht worden, für den Euler-schen Satz die Beweise unabhängig von den Variationen, rein aus analytischen Prinzipien zu führen: schon von Lagrange und später von Poisson, Cauchy und Andern. Allein sie scheinen sämmtlich misslungen zu sein. Ueber den Beweis von Lagrange urtheilt Cauchy selbst, dass derselbe auf der Anwendung sehr complicirter Reihen beruhe, deren Convergenz durch Nichts a priori bewiesen werde. Von Poisson's Beweise wird geurtheilt, dass er vielen Ausnahmen unterliege und nicht die Allgemeinheit habe, die ihm Poisson beilege.

Ich übergehe die übrigen Versuche, und bemerke, dass der Beweis, den Cauchy in der 35. Vorlesung „über Integral-Rechnung“ aufnimmt, auch nicht annehmbar ist, da er „bestimmte Integrale, glückliche Wahl schicklicher Zwischen-Functionen von sehr einfachem Baue, und endlich Grössen verlangt, die so beschaffen sind, dass sie am Eingange des Beweises unabhängig, und am Ende des Beweises abhängig von den Veränderlichen genommen werden.“ Solcherlei Beweise weiter zu zergliedern lohnt sich nicht der Mühe. Es bleibt also immer noch die Aufgabe, den wahren, d. h. objectiven Beweis des schönen Euler'schen Satzes zu finden.

§ 9.

In den Untersuchungen über die Variations-Rechnung, habe ich bewiesen, dass alle Voraussetzungen der Variations-Rech-

nung, als sei sie ein besonderer und eigenthümlicher Calcul, selber unbegründet sind, und dass das Variations-Zeichen als besonderes Zeichen wegfalle. So wie es nämlich totale und partielle Differenzialien giebt, so giebt es auch totale und partielle Maxima und Minima. Dass die sogenannten Variationen nichts anderes sind, als die partiellen Maxima und Minima der Functionen zweier oder mehrerer Veränderlicher, ist eine unumstössliche Folge dieser Wahrheit. Es war daher obiger schöne Satz: $N - dP + d^2Q - d^3R + .. = 0$ nicht aus den Fictionen der Variationen, sondern aus der Lehre der partiellen Differenzial-Gleichungen zu beweisen. Da jedoch in den damaligen Untersuchungen (Grundlegung der Variations-Rechnung) mehr die Theorie der partiellen Maxima und Minima ins Auge gefasst war, so ist hier aus den Eigenschaften der partiellen Differenzial-Operationen dieser Beweis zu führen und in ganzer Allgemeinheit und Vollständigkeit aufzustellen.

§ 10.

Ist $d^n V = 0$ eine totale Differenzial-Gleichung der n^{ten} Ordnung, die bei constant genommenem dx die Differenzialien dy, d^2y, d^3y &c. enthalten möge, und wird $d^n V = 0$ partiell nach y differenzirt, so entsteht $\frac{\partial d^n V \partial y}{\partial y}$.

Werden die Coefficienten von ∂y, ∂dy, $\partial d^2 y$ ..., wie im Vorhergehenden mit N, P, Q, R,... bezeichnet, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{\partial d^n V}{\partial y}\partial y = N\partial y + P\partial dy + Q\partial d^2y + R\partial d^3y + \ldots = 0.$$

Nach bekannten Lehrsätzen des Differenzial-Calculs ist es gleichgültig, ob zuerst partiell und dann total, oder umgekehrt differenzirt wird, und es ist gleichgültig, in welcher Ordnung überhaupt diess geschieht, wenn nur die Anzahl der partiellen und totalen Differenzirungen dieselbe bleibt. Es können demnach die Zeichen d und ∂ gleich Factoren eines Products beliebig vertauscht werden. Geschieht diess, so erhalten wir:

$$d\left(\frac{\partial d^{n-1}V}{\partial y}\partial y\right) = 0 = N\partial y + Pd\partial y + Qd^2\partial y + Rd^3\partial y + \ldots.$$

Wird nun **total** integrirt, so geht der Ausdruck links des Gleichheits-Zeichens in $\frac{\partial d^{n-1}V\partial y}{\partial y}$ über, und rechts des Gleichheits-Zeichens können alle Glieder theilweise integrirt werden, die ein **totales** Differenzial enthalten, wie $Pd\partial y$, $Qd^2\partial y$ &c.; nicht aber $N\partial y$, weil es nur ein partielles Differenzial ∂y hat, dessen Integral demnach bloss angedeutet werden kann, als $\int N\partial y$.

Es wird nun $\int Pd\partial y = P\partial y - \int dP\partial y$;

$$\int Qd^2\partial y = Qd\partial y - \int dQd\partial y;$$

$$= Qd\partial y - dQ\partial y + \int d^2Q\partial y;$$

$$\int Rd^3\partial y = Rd^2\partial y - dRd\partial y + d^2R\partial y - \int d^3R\partial y.$$

Das Bildungsgesetz der nachfolgenden Glieder leuchtet von selbst ein. Dadurch entsteht rechts des Gleichheits-Zeichens ein doppelter Ausdruck, einer der unter dem Integral-Zeichen steht, und der nicht total integrirt werden kann, weil er die partiellen Differenzialien als ∂y zu Factoren hat, und ein anderer Ausdruck, der bereits integrirt ist. Werden diese Grössen der Uebersichtlichkeit willen nach den Factoren ∂y, $d\partial y$, $d^2\partial y, \ldots$ geordnet, so geht die Gleichung hervor:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d^{n-1}V\,\partial y}{\partial y} = 0 = \int\Big((N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots)\,\partial y\Big) &+ \\ + (P - dQ + d^2R - d^3S + \ldots.)\,\partial y &+ \\ + (Q - dR + d^2S + \ldots\ldots\ldots)\,d\partial y &+ \\ + (R - dS + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\,d^2\partial y &+ \\ + \ldots\ldots &\end{aligned}$$

Wird die unter dem totalen Integral-Zeichen stehende Gleichung gleich Null, (was das Criterium der Integrabilität ist,) so bleibt eine vom Integral-Zeichen freie Gleichung:

$$\frac{\partial d^{n-1} V}{\partial y} \partial y = (P - dQ + d^2R - ..) \partial y + (Q - dR + ..) d\partial y + (R - ..) d^2\partial y + .. = 0.$$

Werden dann die partiellen und totalen Differenzial-Zeichen ∂ und d in den Factoren $d\partial y$, $d^2\partial y$ versetzt, was nach früher angeführten Lehrsätzen geschehen kann, so erhalten wir beiderseits die nach y partiell differenzirte Gleichung:

$$\frac{\partial d^{n-1} V}{\partial y} \partial y = (P - dQ + d^2R - ..) \partial y + (Q - dR + ..) \partial dy + (R - ..) \partial d^2y + .. = 0.$$

Wird diese Gleichung partiell nach y integrirt, so entsteht: $d^{n-1}V$.

Die gegebene Differenzial-Gleichung der n^{ten} Ordnung: $d^n V = 0$ ist auf eine Differenzial-Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zurückgebracht, was die Aufgabe war.

Wir gewinnen demnach nicht bloss das Criterium der Integrabilität: $N - dP + d^2Q - d^3Q + \ldots = 0$, sondern wir erhalten zugleich durch die übrig bleibende, partiell nach y differenzirte Gleichung, nach partieller Integration, die totale um einen Grad reducirte Differenzial-Gleichung $d^{n-1}V$, was die Hauptsache ist. Dadurch ist nicht nur bewiesen, dass die Gleichung d^nV integrabel ist, sondern auch, dass sie durch die ausgeführten Operationen schon integrirt ist.

Die Gleichung: $N - dP + d^2Q - d^3R + .. = 0$ wird das Criterium der Integrabilität genannt, weil durch sie der Ausdruck unter dem Integral-Zeichen verschwindet, wodurch sogleich die totale Integration ausgeführt erscheint:

$$\frac{\partial d^{n-1} V}{\partial y} \partial y = (P - dQ + d^2R - ..) \partial y + (Q - dR + \ldots\ldots\ldots) \partial dy + \ldots.$$

Der besondere Fall $N - dP = 0$, der bei Differenzial-Gleichungen des ersten Grades eintritt, ist genau das in § 7 erwähnte Criterium der Integrabilität, so dass dieses nur ein sehr specieller Fall des gegenwärtigen allgemeinen Criteriums ist.

§ 11.

Beispiel 1. Gegeben ist:

$$dV = (y^n + x)\,dy + (x^m + y)\,dx = 0.$$

hier ist $N = ny^{n-1}dy + dx$; $P = y^n + x$;
demnach $N - dP = 0$, und

$$\frac{\partial V \partial y}{\partial y} = P\partial y = (y^n + x)\partial y.$$

Durch partielle Integrirung wird:

$$V = \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy + fx = 0.$$

Durch Differenzirung erfolgt:

$$(y^n + x)\,dy + ydx + d(fx) = 0,$$

durch Vergleichung mit $dV = (y^n + x)\,dy + (x^m + y)\,dx = 0$ folgt: $d(fx) = x^m dx$, also $fx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, so dass die gesuchte Integral-Gleichung ist:

$$V = \frac{y^{n+1}}{n+1} + xy + \frac{x^{m+1}}{m+1} + C = 0.$$

Beispiel 2. Gegeben ist:

$$d^2V = d^2y + 2aydydx + bnx^{n-1}dx^2 = 0.$$

Hier ist: $N = 2adydx$; $P = 2aydx$, $Q = 1$;
demnach: $N - dP + d^2Q = 2adydx - 2adydx = 0$.

Es wird daher:

$$\frac{\partial dV}{\partial y}\partial y = (P - dQ)\,\partial y + Q\partial dy, = 0$$
$$= 2aydx\partial y + \partial dy, = 0$$

und durch partielle Integrirung:

$$dV = ay^2dx + dy + fxdx = 0.$$

Durch Differenzirung erhält man:

$$d^2V = 2aydydx + d^2y + d(fxdx) = 0.$$

Diess mit dem gegebenen d^2V verglichen giebt $d(fxdx) = bnx^{n-1}dx^2$, demnach

$$fxdx = bx^n dx + Cdx.$$

In der That ist auch: $dy + ay^2dx + (bx^n + C)\, dx = 0$ die Gleichung, aus deren Differenzirung $d^2V = 0$ hervorgeht.

Beispiel 3. Gegeben ist:

$$d^3V = (2x + y^2)\, dx^3 + (2xy - 1)\, dydx^2 + xd^2ydx + x^2d^3y = 0.$$

Hier ist: $N = 2ydx^3 + 2xdydx^2$;

$$P = (2xy - 1)\, dx^2; \quad Q = xdx; \quad R = x^2,$$

$$N - dP + d^2Q - d^3R = 2ydx^3 + 2xdydx^2 - 2ydx^3 - 2xdydx^2 = 0$$

$$\frac{\partial d^2V\partial y}{\partial y} = (P - dQ + d^2R)\, \partial y + (Q - dR)\, \partial dy + R\partial d^2y;$$

$$= (2xydx^2)\, \partial y - xdx\partial dy + x^2\partial d^2y;$$

$$d^2V = xy^2dx^2 - xdxdy + x^2d^2y + fxdx^2 = 0.$$

Durch Differenzirung und Vergleichung mit $d^3V = 0$ findet man $fx = x^2 + C$; und in der That ist

$$(C + x^2 + xy^2)\, dx^2 - xdxdy + x^2d^2y = 0$$

die Differenzial-Gleichung des zweiten Grades, aus deren Differenzirung die gegebene Gleichung erfolgt.

§ 12.

Durch den Beweis des Euler'schen Satzes sind wir in den Stand gesetzt, auch den von Lexell aufgestellten, und nach ihm benannten Satz sehr einfach zu beweisen.

Sind die Ausdrücke: $N, P, Q, R\ldots$ bloss Functionen der Veränderlichen x, was bei den linearen Differenzial-Gleichungen jeden Grades der Fall ist, dann lässt sich auch der Ausdruck $d^{n-1}V$ sogleich allgemein darstellen; denn er ist durch partielle Integrirung:

$$d^{n-1}V = (P - dQ + d^2R - .)y + (Q - dR + d^2S - .)dy + \\ + (R - dS + ..)\, d^2y - \ldots$$

Wir erhalten wieder eine lineare Differenzial-Gleichung, und zwar des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

Untersucht man die Bedingung, unter welcher diese integrirt und auf $d^{n-2}V$ zurückgeführt werden kann, so ist in ihr:

$$N' = P - dQ + d^2R - \dots$$
$$P' = Q - dR + d^2S - \dots$$
$$Q' = R - dS + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

und das Criterium der Integrabilität ist wieder:

$$N' - dP' + d^2Q' - .. = P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S + .. = 0.$$

Tritt neben dem ersten, auch diess zweite Criterium ein, so ist $d^nV = 0$ zweimal integrirbar, und es wird

$$\begin{aligned} d^{n-2}V = & (Q - 2dR + 3dS - ..)\, y \\ & + (R - 2dS + \dots\dots)\, dy \\ & + (S - \dots\dots\dots\dots)\, d^2y \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Untersucht man die Integrabilität dieser Gleichung, so wird $N'' = Q - 2dR + 3dS..$, $P'' = R - 2dS..$, $Q'' = S - 2dT + ..$, und $N'' - dP'' + d^2Q'' - .. = Q - 3dR + 6d^2S - .. = 0$, woraus wieder unmittelbar hervorgeht:

$$d^{n-3}V = (R - 3dS + ..)\, y + (S - 3dT..)\, dy + ..$$

Der Zahlen-Coefficienten-Bau dieser Gleichungen ergiebt sich aus den arithmetischen Reihen; und verfolgt man diese Operationen bis zur m^{ten} Ordnung, so entsteht die von Lexell aufgestellte Formel, die in folgenden Ausdruck gefasst werden kann:

Eine Differenzial-Gleichung der n^{ten} Ordnung ist m mal integrirbar, wenn sie folgende m Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} &1)\ N - dP + d^2Q - d^3R + \dots\dots = 0; \\ &2)\ P - 2dQ + 3d^2R - 4d^3S + \dots = 0; \\ &3)\ Q - 3dR + 6d^2S - \dots\dots\dots = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &4)\ \underset{m-1}{N} - m d\underset{m-1}{P} + \frac{m+1 \,.\, m}{1 \,.\, 2} d^2\underset{m-1}{Q} - .. = 0. \end{aligned}$$

Euler und Lexell haben diesen Satz allgemein, von allen Differenzial-Gleichungen zu beweisen gesucht, er gilt jedoch nur in so weit allgemein, als

$$P - dQ + d^2R - \dots = 0, \quad Q - dR + \dots = 0,$$

und alle übrigen angeführten Gleichungen blosse Functionen von x sind. Denn enthielte z. B.

$$\cdot\ P - dQ + d^2R - \ldots$$

auch die Grössen y, $dy \ldots$ so wäre schon:

$$(P - dQ + d^2R - \ldots)\partial y$$

partiell nach y integrirt keineswegs bloss gleich

$$(P - dQ + d^2R - \ldots)\, y,$$

da ja nicht bloss der Factor ∂y, sondern auch der andere Factor

$$P - dQ + d^2R + \ldots$$

die Veränderliche y und ihre Differenzialien enthielte, so dass nach den Gesetzen eines Products integrirt werden müsste.

Der Factor $P - dQ + d^2R - \ldots$ und die übrigen Factoren könnten nur unter der Bedingung die Veränderliche y und ihre Differenzialien enthalten, dass sie identisch gleich Null wären, wodurch die partielle Integration allerdings möglich würde. Dieser Fall kann jedoch wegen Verschiedenheit des Coefficienten-Baues nur zufällig eintreten, wenn nämlich mehrere Coefficienten P, Q, $R \ldots$ einander entsprechend gegeben sind.

So sind denn auch Euler und nach ihm Cauchy (in der 35. Vorlesung seiner Integral-Rechnung) zu der „merkwürdigen“ Folgerung gekommen: „dass diese Functionen (P', P''.. Q', Q''..) endlich verschwinden, oder in Functionen von x allein übergehen.“ Die Wahrheit ist, dass dieser Satz überhaupt nur unter der hintennach als merkwürdige Folgerung gezogenen Einschränkung allgemein gilt und allgemein bewiesen werden kann.

Uebrigens scheint der Lexell'sche Satz, so wie er ist, ein bloss theoretisches Interesse zu haben.

III.

Der integrirende Factor.

§ 13.

Die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Gesetze und Operationen gelten unmittelbar für Differenzial-Gleichungen, die durch Differenzirung entstanden und unverändert geblieben sind. Sie gelten aber nicht unmittelbar, wenn die Differenzial-Gleichungen durch Division gemeinschaftlicher Factoren oder durch Substitutionen gültiger Werthe verändert und anders gestaltet worden sind, ohne dass sie dadurch aufhören müssten, zur nämlichen Stammgleichung zu gehören.

So entsteht z. B. aus: $x^3y^2 - a^5 = 0$ durch Differenzirung die Gleichung $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$, und für sie ist:

$$N = 6x^2ydx + 2x^3dy;\ P = 2x^3y.$$

$N - dP$ wird identisch gleich Null, und es wird:

$$\frac{\partial V}{\partial y}\partial y = P\partial y = 2x^3y\partial y:$$

$V = x^3y^2 + fx ; = 0$ und da durch Differenzirung fx als Constante gefunden wird: $V = x^3y^2 - C = 0$, was mit $x^3y^2 - a^5 = 0$ übereinstimmt.

Wird hingegen die obige Gleichung durch x^2y dividirt, so entsteht: $2xdy + 3ydx = 0$. Es ist: $N = 3dx$; $P = 2x$; und $N - dP = (3 - 2)\,dx$, also nicht gleich Null. Und doch gehört auch diese Differenzial-Gleichung zur Stamm-Function:

$$x^3y^2 - C = 0.$$

Dasselbe gilt in gleichem und höherem Grade von solchen Differenzial-Gleichungen, die durch gültige Substitutionen anders gestaltet erscheinen, als die aus der Differenzirung entstandenen und unverändert gebliebenen Gleichungen.

§ 14.

In diesem Falle multiplicirt man die gegebene Gleichung $d^n V = 0$ mit einer Function φ, und untersucht, welcher Art φ sein müsse, damit die Bedingungs-Gleichung:

$$N - dP + d^2Q - \ldots = 0$$

eintrete. Diese Function nenne ich den integrirenden Factor.

Wird z. B. die obige Gleichung: $2xdy + 3ydx = 0$ mit φ multiplicirt, so entsteht: $2\varphi xdy + 3\varphi ydx = 0$; es wird

$$N = 3\varphi dx;\; P = 2\varphi x \text{ und } N - dP = \varphi dx - 2xd\varphi = 0.$$

Daraus wird $\frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{dx}{2x}$ gefunden, und $\varphi = ax^{\frac{1}{2}}$.

Es ist nun:

$$\frac{\partial V}{\partial y}\partial y = P\partial y = 2\varphi x\partial y = 2ax^{\frac{3}{2}}\partial y;$$

$$V = 2ax^{\frac{3}{2}}y - C = 0;$$

was mit der gegebenen Gleichung $V = x^3y^2 - a^5 = 0$ übereinstimmt.

Der integrirende Factor: $ax^{\frac{1}{2}}$, oder partikular: $x^{\frac{1}{2}}$, sieht also anders aus, als der durch Division ausgefallene Factor: x^2y.

Dieser letztere wird auch integrirender Factor genannt, nämlich wenn durch Reflexion auf das Differenzial eines Products integrirt wird; denn dann wird:

$$x^2y(2xdy + 3ydx) = 2x^3ydy + 3x^2y^2dx = d(x^3y^2) = 0,$$
$$\text{also } x^3y^2 = C.$$

Wird hingegen nicht durch Reflexion auf das Differenzial eines Products, sondern durch die partielle Differenzial-

Gleichung $\frac{\partial V}{\partial y}\partial y = 2x^{\frac{3}{2}}\partial y$ integrirt, so ist $x^{\frac{1}{2}}$ der integrirende Factor.

Von Factoren solcher Art, wie x^2y, die durch andere Operationen und Reflexionen ermittelt werden, wird in gegenwärtiger Untersuchung abgesehen; es wird in ihr nur von Factoren gehandelt, welche die Integration durch partielle Differenzial-Gleichungen möglich machen.

§ 15.

Die Abhängigkeit der Function φ von der gegebenen Differenzial-Gleichung kann in ganzer Allgemeinheit und Durchsichtigkeit dargestellt werden.

Es ist

$$\frac{\partial(\varphi d^n V)}{\partial y}\partial y = 0 = (N\varphi)\,\partial y + (P\varphi)\,d\partial y + (Q\varphi)\,d^2\partial y + \ldots$$

und die Bedingungs-Gleichung, (das Criterium der Integrabilität,) ist:

$$(N\varphi) - d\,(P\varphi) + d^2(Q\varphi) - d^3(R\varphi) + \ldots = 0.$$

Differenzirt man die Factoren $P\varphi$, $Q\varphi$, ..., so wird

$$d(P\varphi) = \varphi dP + Pd\varphi;$$

$$d^2(Q\varphi) = \varphi d^2Q + 2d\varphi dQ + Qd^2\varphi;$$

$$d^3(R\varphi) = \varphi d^3R + 3d\varphi d^2R + 3d^2\varphi dR + Rd^3\varphi;$$

. . . .

$$d^n(U\varphi) = \varphi d^nU + nd\varphi d^{n-1}U + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}d^2\varphi d^{n-2}U + \ldots.$$

Ordnet man diese Glieder nach φ, $d\varphi$, $d^2\varphi$...
so wird die Bedingungs-Gleichung;

$$[\varphi(N - dP + d^2Q - d^3R + ..) - d\varphi(P - 2dQ + 3d^2R - ..) +$$
$$+ d^2\varphi\,(Q - 3dR + 6d^2S - ..) - .. + .. d^n\varphi\,(\ldots)] = 0.$$

Da die Coefficienten der Differenzialien eines Products zweier Factoren mit den Coefficienten der auf einanderfolgenden ersten, zweiten, dritten, ... n^{ten} Potenzen eines Binomiums übereinstimmen, so enthält der Factor von φ die Coefficienten aller

ersten Glieder der auf einander folgenden Potenzen; der Factor von $d\varphi$ alle zweiten Coefficienten, der Factor von $d^2\varphi$ alle dritten Coefficienten u. s. w., also lauter Binomial-Coefficienten, jedesmal mit abwechselnden Zeichen, so dass die Bedingungs-Gleichung ganz einfach und durchsichtig erscheint, während man sich fast ins Unendliche verliert, wenn man den Coefficientenbau ohne diese Kenntniss des Criteriums der Integrabilität in einzelnen Gruppen von Differenzial-Gleichungen empirisch darstellen will. Denn der von Differenzirung abhängige Coefficientenbau umfasst unendlich viele verschiedene algebraische Formen, je nach den verschiedenen algebraischen oder transcendenten Functionen von N, P, Q, R, u. s. w.

Die ganze Formel wird:

$$\int \frac{\partial(\varphi d^n V)}{\partial y}\partial y = \int [(\varphi(N - dP + d^2Q ..) - d\varphi(P - 2dQ + ..) + + d^2\varphi(Q - 3dR + ..) + ...)\partial y]$$

$$+ [\varphi(P - dQ + d^2R - ..) - d\varphi(Q - 2dR + ..) + + d^2\varphi(R - 3dS + ..)]\partial y,$$

$$+ [\varphi(Q - dR + d^2S - ..) - d\varphi(R - 2dS + ..) + + d^2\varphi(S - 3dT + ..)]\partial dy.$$

. . . .

$$+ [\varphi(..) - d\varphi(..) + d^2\varphi(..)..)]\partial d^{n-1}y.$$

Durch die Bedingungs-Gleichung, die gleich Null ist, und die durch $d^n\Phi = 0$ bezeichnet werden soll, fällt der unter dem Integral-Zeichen stehende Theil aus, und es erscheint rechts des Gleichheits-Zeichen sogleich eine total ausgeführte Integration.

Wird nun partiell nach y integrirt, so wird der Ausdruck links des Gleichheits-Zeichens:

$$\int \varphi d^n V = C dx^{n-1}$$

d. h. es wird die gesuchte Differenzial-Gleichung des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades erhalten.

§ 16.

Hier ist es nun wesentlich, zwei Arten von Differenzial-Gleichungen zu unterscheiden, die linearen und die nicht-linearen, eine Unterscheidung, die für die fernere Untersuchung von Wichtigkeit ist.

Differenzial - Gleichungen heissen linear, wenn sie bei constanten dx die Veränderliche y und ihre Differenzialien nur in der ersten Potenz enthalten, und blosse Functionen von x als Coefficienten haben, z. B.

$$X_2 d^2 y + X_1 dy dx + X_0 dx^2 = X dx^2.$$

Die Gleichungen, in denen diess nicht der Fall ist, heissen nicht-linear.

Die linearen Differenzial - Gleichungen heissen vollständig, wenn das von y und seinen Differenzialien freie Glied, (Xdx^2 in obiger Gleichung) nicht gleich Null ist; hingegen heissen sie reducirt, wenn das von y und seinen Differenzialien freie Glied ausfällt.

So ist $$X_2 d^2 y + X_1 dy dx + X_0 dx^2 = X dx^2$$
reducirt oder vollsändig, je nachdem X gleich Null ist, oder nicht.

Für die linearen Differenzial - Gleichungen jeder Art folgt mit Nothwendigkeit, dass die Coefficienten der Gleichung $d^n\varphi = 0$ blosse Functionen von x sind, da sie aus N, P, Q... und ihren Differenzialien gebildet sind, die sämmtlich blosse Functionen von x enthalten. In ihnen wird daher φ eine blosse Function von x. Hingegen in den nicht - linearen Differenzial-Gleichungen sind nothwendig neben x und dx noch Functionen der Veränderlichen y und ihrer Differenzialien einzeln, oder mit einander, enthalten, so dass die Grössen N, P, Q... nicht blosse Functionen von x sein können. Da nun die Coefficienten der Gleichung des integrirenden Factors aus: N, P, Q, ... und ihren Differenzialien gebildet werden, so folgt, dass in diesem Falle $d^n\varphi$ die Veränderlichen x, y und ihre Differenzialien enthält, wodurch φ als Function der beiden von einander abhängigen Veränderlichen x und y gegeben wird.

So giebt z. B. die höchst einfache nicht-lineare (Riccatische) Differenzial-Gleichung des ersten Grades:

$$dy + ay^2dx - cx^n dx = 0;$$
$$\varphi dy + a\varphi y^2 dx - c\varphi x^n dx = 0;$$
$$N = 2a\varphi y dx, \quad P = \varphi; \quad dP = d\varphi;$$
$$N - dP = 2a\varphi y dx - d\varphi = 0;$$
$$\frac{d\varphi}{\varphi} = 2aydx; \quad \log\varphi = C + \int 2aydx;$$
$$\varphi = e^{C + \int 2aydx}.$$

Die Operation $\int 2aydx$, (die Integration durch Quadratur) kann nicht ausgeführt werden, ehe nicht die Gleichung zwischen x und y selbst bekannt ist.

Untersuchungen über solche integrirende Factoren, die Functionen zweier von einander abhängiger Veränderlicher sind, würden über Zweck und Umfang gegenwärtiger Abhandlung hinausführen; wir beschränken uns daher auf die Untersuchung über die integrirenden Factoren der linearen Differenzial-Gleichungen.

§ 17.

Allgemein giebt der integrirende Factor φ eine Differenzial-Gleichung, die mit der gegebenen von gleichem Grade ist. Wenn eine dieser beiden Gleichungen integrirbar ist, so ist es auch die andere. Denn beide haben eine ganz bestimmte Zusammengehörigkeit und eine gegenseitige Abhängigkeit.

Von grossem Werthe wird diese Zusammengehörigkeit, wenn zwar die eine, nicht aber die andere dieser Gleichungen sogleich integrirbar erscheint.

Erläuterndes Beispiel.

Gegeben sei die lineare Differenzial-Gleichung:

$$(a_2 + b_2)\, d^2y + (a_1 + b_1x)\, dydx + (a_0 + b_0x)\, ydx^2 = 0.$$

Die allgemeine Integration dieser Gleichung ist schwierig, und nur durch bestimmte Integrale auszuführen, wenn nicht die Constanten a_2, a_1, a_0; b_2, b_1, b_0 so beschaffen sind, dass die beiden Gleichungen:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$
$$b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$$

wenigstens eine Wurzel λ gemeinschaftlich haben, in welchem Falle $y = e^{\lambda x}$ ein partikulares Integral der gegebenen Gleichung wird, wie hinlänglich bekannt ist.

Es kann nun der Fall eintreten, dass zwar nicht die Coefficienten der gegebenen Gleichung, wohl aber die Coefficienten der Gleichung des integrirenden Factors diese Eigenschaft haben, (was bei Zahlen-Coefficienten unzählige mal statt findet), und dann kann die gegebene Gleichung leicht integrirt werden, weil der integrirende Factor als partikulares Integral bekannt ist.

Sei gegeben:

$$(1+x)\,d^2y + (4+5x)\,dydx + (6+4x)\,ydx^2 = 0$$

worin $\lambda^2 + 4\lambda + 6 = 0$ und $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ keine gleichen Wurzeln haben.

Wird die Gleichung mit dem integrirenden Factor φ multiplicirt, dann ist:

$$N = (6+4x)\varphi dx^2; \quad P = (4+5x)\varphi dx; \quad Q = (1+x)\varphi;$$

und aus $N - dP + d^2Q = 0$ folgt:

$$(1+x)\,d^2\varphi - (2+5x)\,d\varphi dx + (1+4x)\,\varphi dx^2 = 0.$$

Hier haben die beiden Gleichungen:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0; \quad \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

die gemeinschaftliche Wurzel $\lambda = 1$, und $\varphi = e^x$ ist ein partikulares Integral von $d^2\Phi$, demnach $\varphi = e^x$ der integrirende Factor der gegebenen Gleichung d^2V.

Nun ist

$$\frac{\partial dV}{\partial y}\partial y = (Pdx - dQ)\,\partial y + Q\partial dy$$

$$\frac{\partial dV}{\partial y}\partial y = [(3+5x)\,\varphi dx - (1+x)\,d\varphi]\,\partial y + (1+x)\,\varphi\partial dy.$$

Werden die Werthe $\varphi = e^x$ und $d\varphi = e^x dx$ substituirt, so wird:

$$\frac{\partial dV}{\partial y}\partial y = 2(1+2x)e^x\,dx\partial y + (1+x)e^x\partial dy,$$

und nach partieller Integrirung:

$$dV = 2(1+2x)e^x\,ydx + (1+x)e^x dy - Cdx = 0$$

$$dy + \frac{2(1+2x)}{1+x}\,ydx = \frac{Cdx}{(1+x)e^x},$$

eine Differenzial-Gleichung des ersten Grades, die leicht integrirt werden kann, und folgenden Ausdruck giebt:

$$ye^{\int\frac{2(1+2x)}{1+x}dx} - \int\frac{Cdx}{(1+x)e^x}e^{\int\frac{2(1+2x)}{1+x}dx} - C, = 0.$$

Allgemein hat die Gleichung:

$$d^2V = 0 = (a_2+b_2x)\,d^2y + (a_1+b_1x)\,dydx + (a_0+b_0x)\,ydx^2$$

ein partikulares Integrale von der Form: $y = e^{\lambda x}$, wenn die beiden Gleichungen:

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$
$$b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$$

einen gleichen Factor haben.

Eliminirt man λ, so entsteht die Bedingungs-Gleichung:

$$(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2.$$

Findet diese Bedingung nicht statt: so können dennoch die aus der Gleichung des integrirenden Factors:

$$(\alpha_2+\beta_2x)d^2\varphi + (\alpha_1+\beta_1x)\,d\varphi dx + (\alpha_0+\beta_0x)\,\varphi dx^2 = 0$$

abgeleiteten Gleichungen:

$$\alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$
$$\beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0 = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel haben.

Da nun aus $N\varphi dx^2 - d(P\varphi)dx + d^2(Q\varphi) = 0$ folgt, dass

$$\alpha_2 = a_2,\quad \beta_2 = b_2;\quad \alpha_1 = 2b_2 - a_1,\quad \beta_1 = -b_1;$$
$$\alpha_0 = a_0 - b_1,\quad \beta_0 = b_0;$$

so geht die neue Bedingungs-Gleichung hervor:

$$[(b_1-a_0)b_1 - (2b_2-a_1)b_0][a_2b_1 - (a_1-2b_2)b_2] =$$
$$[(a_0-b_1)b_2 - a_2b_0]^2,$$

die wir demnach als zweite Bedingungs-Gleichung der allgemeinen Integrabilität dieser Gruppe von linearen Differenzial-

Gleichungen aufstellen können. Denn auch, wenn sie eintritt, können die Gleichungen dieser Art allgemein integrirt werden.

Es macht keinen Unterschied in der Behandlung, ob in voranstehender Gleichung einfach $d^2V = 0$, oder allgemein $d^2V = Xdx^2$, gegeben ist, wo X eine beliebige Function von x ausdrückt, d. h. es ist für die anzuwendenden Operationen ganz gleichgültig, ob die Gleichung eine reducirte oder eine vollständige lineare Gleichung ist.

In diesem Falle wird nämlich nach der partiellen Integration nach y, die willkührliche Function $fxdx$ nicht gleich Cdx, sondern als Function von x genommen, und es wird durch Differenzirung $d(fx) = Xdx$, also $fx = C + \int Xdx$ gefunden, demnach eine Differenzial-Gleichung des ersten Grades hergestellt, deren Integration keine weitere Schwierigkeit hat.

§ 18.

Von den linearen Differenzial-Gleichungen können durch den integrirenden Factor mehrere Lehrsätze bewiesen werden, von denen wir einige ausheben.

Lehrsatz. Ist von der Gleichung $d^n\Phi = 0$ auch nur ein partikulares Integral, $\varphi_,$, bekannt, so erhält man dennoch durch Substitution von $\varphi_,$ die totale Differenzial-Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, $d^{n-1}V$, wenn d^nV die gegebene Gleichung der n^{ten} Ordnung ist. Ja, um die totale Differenzial-Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu erhalten, braucht man überhaupt nur ein partikulares Integral $\varphi_,$ als integrirenden Factor zu substituiren.

Beweis: Das partikulare Integral $\varphi_,$ macht so gut, wie das vollständige Integral die Bedingungs-Gleichung $d^n\Phi$ gleich Null, und es bleibt demnach:

$$\begin{aligned}\frac{\partial d^{n-1}V}{\partial y}\partial y = {} & [\varphi(\ldots) - d\varphi\,(\ldots).]\partial y \\ & + \varphi\,[(\ldots) - d\varphi\,(\ldots)\ldots]\,\partial dy \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Durch partielle Integrirung nach y erhält man $d^{n-1}V$ als Differenzial-Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit einer durch die Integration eintretenden willkührlichen Constante C. Die so gefundene Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hat demnach eine Constante mehr als die gegebene Gleichung der n^{ten} Ordnung, und ist vermöge dieser Eigenschaft, wie bekannt, ihr totales Integral.

Dieser Lehrsatz ist von Wichtigkeit, wenn man etwa bei Differenzial-Gleichungen das eine oder andere partikulare Integral kennt, ohne des vollständigen Integrals habhaft werden zu können.

Erläuterndes Beispiel.

Sei die lineare Differenzial-Gleichung gegeben:

$$x^2d^2y + 5xdydx + 4ydx^2 = 0.$$

Wird sie mit φ multiplicirt, so ist:

$$N = 4\varphi dx^2; \quad P = 5x\varphi dx, \quad Q = x^2\varphi$$

und es entsteht die Bedingungs-Gleichung:

$$x^2d^2\varphi - xdxd\varphi + \varphi dx^2 = 0.$$

Diese hat, wie man augenblicklich sieht, ein partikulares Integral $\varphi = x$.

Es wird nun:

$$\partial\left(\frac{\varphi dV}{\partial y}\right)\partial y = [\varphi(P - dQ) - Qd\varphi]\partial y + \varphi Q\partial dy;$$
$$= 2x^2dx\partial y + x^3\partial dy.$$

Aus der partiellen Integration folgt:

$$2x^2ydx + x^3dy - Cdx = 0,$$

eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung, die wirklich das vollständige Integral von $d^2V = 0$ ist.

Integrirt man, um die Untersuchung zu vollenden, und zur Stammgleichung zu gelangen, die gefundene Gleichung durch den integrirenden Factor ψ, so wird in ihr: $N = 2x^2\psi dx$, $P = x^3\psi$, und $N - dP = 0$; $-x^2\psi dx - x^3d\psi = 0$, demnach

$\psi = \frac{\alpha}{x}$. Diess giebt: $\frac{\partial(\psi V)}{dy}\partial y = \alpha x^2 \partial y$, und nach partieller Integration: $\alpha x^2 y - fx - C = 0$.

Um fx zu bestimmen, wird differenzirt:

$$2\alpha xydx + \alpha x^2 dy - d(fx) = 0.$$

Diess mit obiger Gleichung: $2x^2ydx + x^3dy - Cdx = 0$ verglichen giebt:

$$\frac{xd(fx)}{\alpha} = Cdx;\ dfx = \frac{\alpha Cdx}{x} = \frac{C'dx}{x};$$

$$fx = \beta C' \log x = C'' \log x.$$

Die Stamm-Gleichung ist demnach: $\alpha x^2 y - C'' \log x - C = 0$, die scheinbar drei Constanten enthält, α, C'', C; welche sich jedoch durch Division mit α auf zwei Constanten $\frac{C''}{\alpha}$ und $\frac{C}{\alpha}$ reduciren. Gerade weil statt des partikularen Integrals: $\psi = \frac{1}{x}$ das vollständige Integral: $\psi = \frac{\alpha}{x}$ gewählt wurde, ist man genöthigt, durch α zu dividiren. Es ist daher völlig überflüssig ein vollständiges Integral zu substituiren, da die nothwendigen Constanten aus der Integration: $\frac{\partial d^{n-1} V \partial y}{\partial y}$ ohnehin hervorgehen.

Die gefundene Gleichung ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung, weil sie zwei willkührliche Constanten enthält.

Zusatz. Wie bekannt entspricht der gegebenen Differenzial-Gleichung d^2V die algebraische Gleichung

$$m^2 + 4m + 4 = 0,$$

die zwei gleiche Wurzeln: $m = -2$ hat. Ein partikulares Integral ist damnach: $y = ax^{-2}$.

In der That folgt diess auch aus dem vollständigen Integral: $x^2y - C_{,,} \log x - C = 0$, wenn $C_{,,} = 0$ gesetzt wird, so dass $y = Cx^{-2}$ als partikulares Integral übrig bleibt.

Das vollständige Integral hat also bei gleichen Wurzeln eine logarithmische Form, und um diese deutlich zu stellen, wurde gerade ein solches Beispiel gewählt.

Die durch den integrirenden Factor gegebene Ableitung der logarithmischen Form des vollständigen Integrals hat denn doch einen ganz anderen Werth, als die gewöhnliche Ableitung, in der man zur Gleichung $+\infty - \infty = 0$ seine Zuflucht nimmt, eine Gleichung, die keineswegs unbedingte Gültigkeit hat. Die Bemerkung, wie sie gewöhnlich gemacht wird, dass diese Gleichung $+\infty - \infty = 0$ hier doch gelte, weil die beiden Constanten C und $C_{,,}$ jeden beliebigen Werth haben können, scheint mir kein Beweis zu sein.

§ 19.

Lehrsätze, deren Beweise selbstverständlich sind:

1) Sind φ', φ'', $\varphi''' \ldots \varphi^{v}$ die n partikularen Integrale der Bedingungs-Gleichung $d^n\Phi = 0$, so können, je nachdem φ' oder $\varphi'' \ldots \varphi^{v}$ als integrirende Factoren gebraucht werden, aus $d^nV = 0$, n verschiedene vollständige Differenzial-Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gebildet werden. — Aus einer algebraischen Gleichung der n^{ten} Ordnung, $\underset{n}{F} = 0$, können ebenfalls n verschiedene algebraische Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gebildet werden, je nachdem man den einen oder andern ihrer n Factoren $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma \ldots x-\nu$ eliminirt. Es ist

$$\begin{aligned} \underset{n}{F} &= \underset{n-1}{F'}\,(x-\alpha),\\ &= \underset{n-1}{F''}\,(x-\beta),\\ &= \underset{n-1}{F'''}\,(x-\gamma),\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und $\underset{n-1}{F'}$, $\underset{n-1}{F''}$, $\underset{n-1}{F'''} \ldots$ sind n verschiedene algebraische Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

2) Von welchem der n partikularen Integrale man auch ausgehen möge, man gelangt immer nach n maliger Integration zur nämlichen allgemeinen Stamm-Gleichung, gerade wie man bei algebraischen Gleichungen, von welcher der n Wurzeln

man auch ausgehen möge, am Ende immer zur nämlichen vollständigen Wurzel gelangt:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,..\,(x-\nu)=0.$$

3) Die vollständige Wurzel einer algebraischen Gleichung der n^{ten} Ordnung besteht aus n Factoren, und enthält jede partikulare Wurzel als Factor; das vollständige Integral einer Differenzial-Gleichung der n^{ten} Ordnung besteht aus der Summe der n partikularen Integrale, und enthält jedes einzelne partikulare Integral als Summanden. U. s. w.

Die schönen Relationen, die zwischen den partikularen Integralen der beiden Gleichungen d^nV und $d^n\Phi$ bestehen, und zwar in allen ableitbaren Ordnungen vom n^{ten} Differenzial an bis zur Stamm-Gleichung, bilden den Gegenstand specieller Untersuchungen und werden hier übergangen.

§ 20.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit folgendem Lehrsatz:

Wird die Gleichung des integrirenden Factors:

$$\varphi(N-dP+d^2Q-.)-d\varphi(P-2dQ+3d^2R-.)+ \\ +d^2\varphi(Q-3dR+..)+..=0$$

mit $d^n\Phi$ bezeichnet und ist φ' ein partikulares Integral von $d^n\Phi$; ist ferner $d^nV=0$ die gegebene Gleichung, und y' ein partikulares Integral von ihr (als reducirt genommen); so sind φ' und y' gegenseitig integrirende Factoren der ihnen entsprechenden Gleichungen d^nV und $d^n\Phi$.

Beweis. Bezeichnet man in $d^n\Phi$ die Coefficienten von φ, $d\varphi$, $d^2\varphi$.. mit N', P', Q'.., so sei, wenn nicht $y_{,}$, irgend eine andere Function ψ der integrirende Factor von $d^n\Phi$. Wir erhalten dann die Bedingungs-Gleichung:

$$(\psi N')-d(-\psi P')+d^2(\psi Q')-..=0.$$

Diese Gleichung nach ψ, $d\psi$, $d^2\psi$.. geordnet giebt:

$$\psi(N'+dP'+d^2Q'..)+d\psi(P'+2dQ'..)+d^2\psi('+..)=0.$$

Nun ist:
$$N' + dP' + d^2Q' + .. = N,$$
$$P' + 2dQ' + \ldots\ldots\ldots = P,$$
$$Q' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = Q,$$
wie die Substitution lehrt. Es ist nämlich z. B.
$$N' = ..N - dP + d^2Q - d^3R + ..$$
$$dP' = \ldots dP - 2d^2Q + 3d^3R - ..$$
$$d^2Q' = \ldots\ldots\ldots d^2Q - 3d^3R + ..$$
$$d^3R' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d^3R - ..$$
folglich
$$N' + dP' + d^2Q' + d^3R' .. = N.$$
Dasselbe gilt von den übrigen Coefficienten.

Die Bedingungs-Gleichung für $d^n\Phi$ wird demnach:
$$N\psi + Pd\psi + Qd^2\psi + Rd^3\psi + .. = 0.$$

Es ist nicht schwer, nachzuweisen, dass diese mit der gegebenen Gleichung $d^nV = 0$ identisch ist, vorausgesetzt, dass letztere als reducirt genommen wird.

Denn die gegebene Gleichung d^nV partiell nach y differenziert giebt
$$\text{(I)} \qquad N\partial y + P\partial dy + Q\partial d^2y + R\partial d^3y + .. = 0$$
und die Bedingungs-Gleichung
$$N\psi + Pd\psi + Qd^2\psi + Rd^3\psi + .. = 0$$
partiell nach ψ differenzirt, giebt, da $N, P, Q, R\ldots$ blosse Functionen von x enthalten:
$$\text{(II)} \qquad N\partial\psi + P\partial d\psi + Q\partial d^2\psi + R\partial d^3\psi + .. = 0.$$

Beide Gleichungen (I) und (II) stimmen vollkommen mit einander überein, und können nach partieller Integrirung höchstens um eine willkührliche Function von x verschieden sein. Diese willkührlichen Functionen von x beziehen sich aber auf die vollständigen, nicht auf die reducirten Gleichungen, für welche also $\psi = y$ gesetzt werden muss.

Da die Gleichung $d^n\Phi$ jederzeit von selbst eine reducirte Gleichung ist, so ergiebt sich der Lehrsatz:

Wenn y_1 ein partikulares Integral der reducirten Gleichung von d^nV ist, und φ_1 ein partikulares Integral der Gleichung

$d^n\Phi$, so ist φ' ein integrirender Factor von d^nV und y' ein integrirender Factor von $d^n\Phi$, was zu beweisen war.

Erläuterndes Beispiel.

Sei gegeben:

$$1)\qquad d^2V = d^2y - \frac{2dydx}{x} + \left(\frac{2}{x^2} - \varkappa^2\right)dx^2 = 0.$$

Diese Gleichung mit φ multiplicirt, giebt:

$$N = \varphi\left(\frac{2}{x^2} - \varkappa^2\right)dx^2;\quad P = -\frac{2\varphi dx}{x};\quad Q = \varphi;$$

und $$N - dP + d^2Q = d^2\varphi + \frac{2d\varphi dx}{x} - \varkappa^2\varphi dx^2 = 0.$$

Von dieser Gleichung kennt man ein partikulares Integral:

$$\varphi' = \frac{e^{-\varkappa x}}{x}.$$

Es wird demnach:

$$\frac{\partial dV\partial y}{\partial y} = (P - dQ)\,\partial y + Q\partial dy;$$

$$= \left(\frac{\varkappa e^{-\varkappa x}}{x} - \frac{e^{-\varkappa x}}{x^2}\right)dx\partial y + \frac{e^{-\varkappa x}}{x}\partial dy;$$

$$dV = \left(\frac{\varkappa e^{-\varkappa x}}{x} - \frac{e^{-\varkappa x}}{x^2}\right)ydx + \frac{e^{-\varkappa x}}{x}dy + d(fx) = 0.$$

Durch Differenzirung und Vergleichung findet man

$$d(fx) = Cdx.$$

Setzt man $C = 0$ so vereinfacht sich die Gleichung, man erhält jedoch ein bloss partikulares Integral. Die Gleichung dV geht dann über in:

$$\left(\varkappa - \frac{1}{x}\right)ydx + dy = 0,$$

Daraus folgt: $$\log my - \log x = -\varkappa x,$$

$$y = \frac{x}{m}e^{-\varkappa x},$$

ein partikulares Integral der gegebenen Gleichung $d^2V = 0$.

2) Ist nun umgekehrt

$$d^2\Phi = d^2\varphi + \frac{2d\varphi dx}{x} - \varkappa^2\varphi dx^2 = 0$$

gegeben, so wird die Bedingungs-Gleichung für den integrirenden Factor ψ, da:

$$N = -\varkappa^2\psi dx^2; \quad P = \frac{2\psi dx}{x}, \quad Q = \psi \quad \text{ist},$$

$$N - dP + d^2Q = d^2\psi - \frac{2dxd\psi}{x} + \left(\frac{2}{x^2} - \varkappa^2\right)\psi dx^2 = 0,$$

die mit der ursprünglich gegebenen Gleichung (1):

$$d^2y - \frac{2dxdy}{x} + \left(\frac{2}{x^2} - \varkappa^2\right) ydx^2 = 0$$

übereinstimmt. Es ist demnach $\psi = y$.

Ein partikulares Integral dieser Gleichung ist, wie wir gefunden haben: $\psi' = xe^{-\varkappa x}$.

Nun wird

$$\frac{\partial d\Phi \partial\varphi}{\partial\varphi} = (Pdx - dQ)\partial\varphi + Q\partial d\varphi,$$

$$= (e^{-\varkappa x} + \varkappa xe^{-\varkappa x})\, dx\partial\varphi + xe^{-\varkappa x}\,\partial d\varphi.$$

$$d\Phi = (e^{-\varkappa x} + \varkappa xe^{-\varkappa x})\, dx\varphi + xe^{-\varkappa x}\, d\varphi = 0,$$

wenn die Constante gleich Null genommen wird, damit ein partikulares Integral hervorgehe.

Die Gleichung vereinfacht sich in:

$$d\Phi = (1 + \varkappa x)\,\varphi dx + xd\varphi = 0,$$

welche integrirt das partikulare Integral

$$\varphi = \frac{e^{-\varkappa x}}{x} \quad \text{giebt.}$$

Diess ist genau der oben gefundene Werth, so wie $\psi = xe^{-\varkappa x}$ der für y gefundene Werth ist, so dass $\psi = y$ gesetzt werden muss. Wenn man die Constanten in den ersten Differenzial-Gleichungen dV und $d\Phi$ beibehält, so hat es keine Schwierigkeit die vollständigen Integrale von y und φ herzustellen.

IV.

Anwendungen und Beispiele.

§ 21.

Die integrirende Gleichung $d^n\Phi = 0$ ist mit der gegebenen Gleichung $d^n V = 0$ so innig verflochten, dass die bisher versuchten Substitutions-Methoden nur empirisch gefundene Bruchstücke der in $d^n\Phi = 0$ enthaltenen allgemeinen Operationen sind.

Doch giebt es zwei Gruppen linearer Differenzial-Gleichungen, in denen die empirisch verwendeten Methoden, ohne auf die Idee eines allgemeinen integrirenden Factors geführt zu haben, mit den allgemeinen Operationen des integrirenden Factors vollständig übereinstimmen. Diess sind gerade solche Gleichungen, in denen wirklich relativ allgemeine Resultate gefunden worden sind.

Diess Zusammentreffen der allgemeinen und der empirischen Methode findet sich in den zwei linearen Differenzial-Gleichungen von der Form:

$$Aydx^n + Bdydx^{n-1} + Cd^2ydx^{n-2} + \ldots Md^ny - Xdx^n = 0$$
$$Aydx^n + Bxdydx^{n-1} + Cx^2d^2ydx^{n-2} + \ldots Mx^nd^ny - Xdx^n = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen hat constante Coefficienten, die zweite hat in den aufeinander folgenden Gliedern die Factoren: x^0, x, $x^2 \ldots x^n$. In beiden ist X eine beliebige Function von x; beide sind vollständige Differenzial-Gleichungen und gehen in reducirte über, wenn $X = 0$ gesetzt wird.

Für beide Gleichungen lassen sich die partikularen Integrale sehr einfach aufstellen. Wird die erste Gleichung reducirt genommen:

$$Aydx^n + Bdydx^{n-1} + Cd^2ydx^{n-2} \ldots + Md^ny = 0,$$

so braucht man nur Functionen zu substituiren, deren Differenzialien einfach periodisch sind, so dass sie in allen Gliedern durch Division ausfallen. Dann bleibt eine algebraische Gleichung der n^{ten} Ordnung übrig, aus deren n Wurzeln die n partikularen Integrale hergestellt werden.

Eine solche Function von einfacher Periodicität ist:

$$y = e^{\lambda x}; \text{ denn es ist: } dy = \lambda e^{\lambda x} dx;$$
$$d^2y = \lambda^2 e^{\lambda x} dx^2, \ldots \; d^ny = \lambda^n e^{\lambda x} dx^n.$$

Werden diese Werthe in die Gleichung substituirt, so fallen $e^{\lambda x}$ und dx^n in allen Gliedern aus, und es bleibt:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + \ldots M\lambda^n = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung geben n Werthe:

$$\lambda_1, \; \lambda_2, \; \lambda_3 \ldots \lambda_\nu \; \ldots$$

und jede der n Gleichungen

$$y = e^{\lambda_1 x}, \; y = e^{\lambda_2 x}, \; y = e^{\lambda_3 x} \ldots \; y = e^{\lambda_\nu x},$$

macht die gegebene Differenzial-Gleichung zu Null, so dass jede ein partikulares Integral liefert.

Es ist einleuchtend, dass jede in ihren Differenzialien periodische Function dasselbe leisten würde. Von den elementaren Functionen haben Sinus und Cosinus ebenfalls eine Periodicität, aber nur in den Differenzialien gerader Ordnung, so dass

$$d^2 \sin \lambda x = -\lambda^2 \sin \lambda x dx^2; \; d^4 \sin \lambda x = +\lambda^4 \sin \lambda x dx^4, \ldots$$
$$d^2 \cos \lambda x = -\lambda^2 \cos \lambda x dx^2; \; d^4 \cos \lambda x = +\lambda^4 \cos \lambda x dx^4, \ldots$$

Hat daher eine Differenzial-Gleichung die Form:

$$Aydx^{2n} + Cd^2ydx^{2n-2} + Ed^4ydx^{2n-4} + \ldots$$

so geben die Substitutionen: $y = \sin \lambda x$, oder $y = \cos \lambda x$ ebenfalls partikulare Integrale. Da in diesem Falle die Zeichen der

Glieder wechseln, so werden die Integrale durch Sinus und Cosinus reelle Grössen, wenn die Substitution $y = e^{\lambda x}$ imaginäre Integrale liefert, und umgekehrt; was ohnehin aus dem Moivre'schen Lehrsatze bekannt ist. Aus den partikularen Integralen erhält man durch Summirung das vollständige Integral mit n willkührlichen Constanten.

$$y = \mathfrak{A}e^{\lambda_1 x} + \mathfrak{B}e^{\lambda_2 x} + \mathfrak{C}e^{\lambda_3 x} + \ldots \; + \mathfrak{N}e^{\lambda_\nu x},$$

oder $$y = \mathfrak{A}\sin\lambda_1 x + \mathfrak{B}\sin\lambda_2 x + \mathfrak{C}\sin\lambda_3 x + \ldots + \mathfrak{N}\sin\lambda_\nu x,$$

ohne inne zu werden, aus welcher Differenzial-Gleichung der $(n-1)^{ten}$ oder $(n-2)^{ten}$ Ordnung die gegebene Differenzial-Gleichung abgeleitet worden ist, sohin ohne alle und jede Integration.

Aehnlich verhält es sich mit der zweiten Gleichung:

$$Aydx^n + Bxdydx^{n-1} + Cx^2d^2ydx^{n-2} + \ldots \; Mx^nd^ny = 0.$$

Ihr genügen als partikulare Integrale einfache Functionen von x, deren Exponenten durch Differenzirung je um eine Einheit abnehmen, wofür die im Exponenten um eine Einheit zunehmenden Factoren: x^0, x, x^2, $x^3, \ldots$ x^n successiv eintreten, so dass die Function in allen Gliedern durch Division ausfällt, und eine algebraische Gleichung des n^{ten} Grades zurücklässt.

Eine solche Function ist $y = x^\mu$. Wird sie in der Gleichung substituirt, so folgt:

$$A + \mu B + \mu \,.\, \mu - 1 \,.\, C + \ldots \; \mu \,.\, \mu - 1 \ldots \; \mu - (n-1)\, M = 0.$$

Diese Gleichung giebt n Werthe von μ, die eben so viele partikulare Integrale liefern:

$$y_1 = x^{\mu_1},\; y_2 = x^{\mu_2}, \ldots y_\nu = x^{\mu_\nu}.$$

Durch Summirung erhält man das vollständige Integral mit n willkührlichen Constanten:

$$y = \mathfrak{A}x^{\mu_1} + \mathfrak{B}x^{\mu_2} + \mathfrak{C}x^{\mu_3} + \ldots + \mathfrak{N}x^{\mu_\nu},$$

gleichfalls ohne alle und jede Integration.

Beide Gleichungen haben noch folgende erwähnenswerthe Eigenschaft:

Wird ein partikulares Integral von $d^n V$ mit $y_{,}$, und das correspondirende partikulare Integral von $d^n \Phi$ mit $\varphi_{,}$ bezeichnet, so ist in ersterer Gleichung mit constanten Coefficienten $y' \varphi_{,} = c$ und in letzterer: $y_{,} \varphi_{,} = \frac{c}{x}$.

Ist daher in ersterer Gleichung ein partikulares Integral von $d^n V$ gleich $e^{\lambda_{,} x}$, so ist das correspondirende partikulare Integral der Gleichung $d^n \Phi$ gleich $e^{-\lambda_{,} x}$; und ist in der zweiten Gleichung $x^{\mu_{,}}$ ein partikulares Integral von $d^n V$, so ist das correspondirende partikulare Integral von $d^n \Phi$ gleich: $x^{-(\mu_{,}+1)}$, wie später bewiesen werden wird.

§ 22.

Ist nun zwar in den reducirten Gleichungen der integrirende Factor zur Herstellung des vollständigen Integrals nicht nothwendig, da überhaupt nicht integrirt wird, so ändert sich diess vollständig, wenn entweder

1) einzelne partikulare Integrale einander gleich sind, was dann eintritt, wenn die algebraischen Gleichungen gleiche Wurzeln liefern, oder wenn

2) nicht die reducirten, sondern die vollständigen Differenzial-Gleichungen $d^n V$ integrirt werden sollen. In beiden Fällen braucht man unbedingt den integrirenden Factor.

Seit Euler integrirt man nun die vollständigen Differenzial-Gleichungen $d^n V$ durch empirisch abgeleitete Operationen, die mit den allgemeinen und apriorischen Operationen des integrirenden Factors ganz übereinstimmen. Hingegen der Fall, dass die reducirten Gleichungen mehrere gleiche partikulare Integrale haben, wurde nicht durch die Operationen des integrirenden Factors, sondern durch andere Theorien gelöst, die haltlos erscheinen. Wir wollen diese zuerst ins Auge fassen.

§ 23.

Sind zwei oder mehrere partikulare Integrale einander gleich, so sind die Ausdrücke:

$$y = \mathfrak{A}e^{\lambda_1 x} + \mathfrak{B}e^{\lambda_2 x} + \mathfrak{C}e^{\lambda_3 x} + \ldots \mathfrak{N}e^{\lambda_\nu x},$$
$$y = \mathfrak{A}x^{\mu_1} + \mathfrak{B}x^{\mu_2} + \mathfrak{C}x^{\mu_3} + \ldots \mathfrak{N}x^{\mu_\nu},$$

nicht mehr die vollständigen Integrale der gegebenen Gleichung, weil durch Zusammenziehung der gleichen partikularen Integrale eine oder mehrere Constanten ausfallen. Und weil das vollständige Integral von $d^n V$ nothwendig n Constanten hat, so muss man die ausgefallenen Constanten auf andere Art wieder einführen.

Nehmen wir zuerst die Gleichung:

$$Aydx^n + Bdydx^{n-1} + Cd^2ydx^{n-2} + \ldots Md^ny = 0.$$

Wird diese mit φ multiplicirt, damit $d^n\Phi$ gebildet werden könne, so entsteht:

$$A\varphi ydx^n + B\varphi dydx^{n-1} + C\varphi d^2ydx^{n-2} + \ldots M\varphi d^ny = 0.$$

Nach der Bezeichnung des vorhergehenden Abschnitts ist:

$$N = A\varphi dx^n; \quad P = B\varphi dx^{n-1}; \quad Q = C\varphi dx^{n-2}; \ldots$$

und die aus der Bedingungs-Gleichung:

$$N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots = 0$$

hervorgehende Gleichung:

$$A\varphi dx^n - Bd\varphi dx^{n-1} + Cd^2\varphi dx^{n-2} + \ldots \pm Md^n\varphi = 0$$

giebt wieder eine Gleichung mit constanten Coefficienten, die mit der gegebenen vollkommen übereinstimmt mit Ausnahme des Zeichenwechsels in den aufeinander folgenden Gliedern.

Ihre partikularen Integrale haben die Form: $\varphi = e^{\alpha x}$, und werden sie substituirt, so entsteht die algebraische Gleichung:

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + \ldots \pm M\alpha^n = 0.$$

Ihre n Wurzeln geben die partikularen Integrale:

$$\varphi = e^{\alpha_1 x}; \quad \varphi = e^{\alpha_2 x}; \ldots \varphi = e^{\alpha_\nu x},$$

deren jedes ein integrirender Factor der gegebenen Gleichung $d^n V$ ist.

Je nachdem der eine oder der andere dieser Factoren gewählt wird, können n verschiedene Gleichungen des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades hergestellt werden, aus denen die eine gegebene Gleichung, $d^n V$, durch Differenzirung entsteht.

Da die Gleichnng: $d^n V$, partikulare Integrale von der Form: $y = e^{\lambda x}$, und die integrirende Gleichung: $d^n \Phi$, partikulare Integrale von der Form: $\varphi = e^{\alpha x}$ hat, und da die Werthe λ und α aus den Gleichungen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \ldots + M\lambda^n = 0,$$
$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + \ldots \pm M\alpha^n = 0,$$

hervorgehen, so stimmen λ und α nothwendig überein bis auf ihre Zeichen, und es ist $\alpha = -\lambda$. Die n integrirenden Factoren der gegebenen Gleichung sind demnach:

$$\varphi = e^{-\lambda_1 x}; \quad \varphi = e^{-\lambda_2 x}; \ldots \varphi e^{-\lambda_\nu x}.$$

Hier kann nun sogleich der im Vorhergehenden angedeutete Lehrsatz, dass in dieser Gruppe von Differenzial-Gleichungen: $y,\varphi, = c$ sei, aufs Leichteste bewiesen werden. Denn ist

$y, = e^{\lambda x}$, so ist $\varphi, = e^{-\lambda x}$, und $y,\varphi, = 1$, oder allgemein

$$y,\varphi, = ae^{\lambda x} \,.\, be^{-\lambda x} = ab,$$

das Product $y,\varphi,$ ist eine Constante, was zu beweisen war.

§ 24.

Wählt man nun irgend einen dieser Factoren, z. B. $\varphi = e^{-\lambda_1 x}$, so wird nach § 15

$$\begin{aligned} d^{n-1}V = 0 = (P - dQ + d^2R - d^3S\ldots)y &+ \\ + (Q - dR + d^2S - \ldots\ldots)dy &+ \\ + (R - dS + d^2T - \ldots\ldots)d^2y &+ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ + Md^{n-1}y - C_0 dx^{n-1}. & \end{aligned}$$

Da $\quad P = Be^{-\lambda_1 x}dx^{n-1}; \; Q = Ce^{-\lambda_1 x}dx^{n-2}; \; R = De^{-\lambda_1 x}, \ldots$

so wird:

$$d^{n-1}V = 0 = (B + \lambda_, C + \lambda_,^2 D + \ldots)e^{-\lambda_, x} y dx^{n-1} + \\ + (C + \lambda_, D + \lambda_,^2 E + \ldots)e^{-\lambda_, x} dy dx^{n-2} + \\ + (D + \lambda_, E + \ldots\ldots\ldots)e^{-\lambda_, x} d^2 y dx^{n-3} + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + M e^{-\lambda_, x} d^{n-1} y - C_0 dx^{n-1}.$$

Der Coefficientenbau zeigt, dass

$$(3)\quad (B + \lambda_, C + \lambda^2 D + \ldots) y dx^{n-1} + (C + \lambda_, D + \ldots) dy dx^{n-2} + \\ + (D + \lambda_, C + \ldots) d^2 y dx^{n-3} + \ldots\ M d^{n-1} y = C_0 e^{\lambda_, x} dx^{n-1}$$

links des Gleichheits-Zeichens die Gleichung des $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades giebt, welche die bei der Integration nicht verwendeten $(n-1)$ Werthe $e^{-\lambda_2 x}$, $e^{-\lambda_3 x} \ldots\ e^{-\lambda_\nu x}$ zu integrirenden Factoren hat, und durch einen weitern integrirenden Factor z. B. $e^{-\lambda_2 x}$ auf eine Gleichung des $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades gebracht wird, die ihrerseits die nicht verwendeten Werthe $e^{-\lambda_3 x}, \ldots\ e^{-\lambda_\nu x}$ zu integrirenden Factoren hat. Und so wird fortgefahren bis zur n^{ten} Integration, in welcher der letzte Factor verwendet, und das vollständige Integral hergestellt wird.

So wird man nun allerdings nicht verfahren, wenn man das vollständige Integral so leicht haben kann, wie Anfangs gefunden wurde:

$$y = \mathfrak{A} e^{\lambda_1 x} + \mathfrak{B} e^{\lambda_2 x} + \mathfrak{C} e^{\lambda_3 x} + \ldots\ \mathfrak{N} e^{\lambda_\nu x};$$

doch wird diese Integrations-Methode nothwendig, wenn zwei oder mehrere Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ einander gleich sind. Denn ist z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$ dem hat y nur $(n-1)$ willkührliche Constanten und ist demnach nicht das vollständige Integral.

Wird die Gleichung (3) aufs Neue integrirt, so sei $e^{-\lambda_2 x}$ ihr integrirender Factor; der Ausdruck rechts des Gleichheits-Zeichens geht dann in:

$$C_0 e^{-\lambda_2 x} e^{\lambda_1 x} dx^{n-1} = C_0 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx^{n-1}$$

über, dessen Integral $C_1 dx^{n-2} + C_0 \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx^{n-1}$ ist. Ist

jedoch $\lambda_2 = \lambda_1$ so wird $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 1$, und das Integral rechts des Gleichheits-Zeichens wird:

$$C_1 dx^{n-2} + C_0 x dx^{n-2} = (C_1 + C_0 x) dx^{n-2}.$$

Man erhält statt der zwei gleichen partikularen Integrale $\mathfrak{A} e^{\lambda_1 x} + \mathfrak{B} e^{\lambda_2 x}$, (die in Wahrheit nur ein einziges partikulares Integral sind, wenn $\lambda_2 = \lambda_1$ ist), die wirklichen zwei partikularen Integrale $(C_1 + C_0 x) e^{\lambda_1 x} = y$, wie bekannt ist.

§ 25.

Da man den integrirenden Factor nicht kannte, so half man sich hier auf folgende Art, z. B. schon bei Gleichungen des zweiten Grades. „Das vollständige Integral einer solchen Differenzial-Gleichung zweiter Ordnung sei:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Für $\lambda_2 = \lambda_1$ würde $y = (C_1 + C_2) e^{\lambda_1 x} = C_3 e^{\lambda_1 x}$, das nicht mehr das allgemeine Integral ist. Man erhält letzteres auf folgendem Wege: Sei δ die Differenz zwischen λ_2 und λ_1, mithin $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$, so ist, indem man die Exponential-Reihe benützt:

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 e^{\delta x}) \\ &= e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 + (C_2 \delta) x + \tfrac{1}{2}(C_2 \delta^2) x^2 + \ldots), \end{aligned}$$

oder wenn $C_1 + C_2 = C$ und $C_2 \delta = C'$ gesetzt wird:

$$y = e^{\lambda_1 x}(C + C'x + \tfrac{1}{2}(C'\delta) x^2 + \tfrac{1}{6}(C'\delta)^2 x^3 + \ldots)$$

Für $\delta = 0$ werden λ_1 und λ_2 gleich, und es ist für diesen Fall:

$$y = e^{\lambda_1 x}(C + C'x)$$

das allgemeine Integral.“

Hier ist Folgendes zu erinnern: Wird $\delta = 0$ gesetzt, damit $\lambda_2 = \lambda_1$ werde, dann fallen allerdings in der Exponential-Reihe die Glieder mit δ aus; allein da $C_2 \delta = C'$ gesetzt wurde, ist auch $C' = 0$, wenn nicht $C_2 = \infty$ genommen wird. Und ist $C_2 = \infty$, dann ist $C = C_1 + C_2$ ebenfalls unendlich, und

das für vollständig gehaltene Integral ist entweder $y = C_{,}e^{\lambda_1 x}$, d. h. partikular, oder $y = \infty e^{\lambda_1 x}$, d. h. gar kein Integral.

Allerdings weiss man seit Euler aus berechneten Zahlen-Beispielen, dass $y = e^{\lambda_1 x}(C + C'x)$ sein müsse, worin C und C' beliebige endliche Constanten ausdrücken; das Resultat ist richtig, aber die Art der Herleitung ist nicht annehmbar.

§ 26.

Erläuterndes Beispiel.

Gegeben sei:

$$d^3V = d^3y + 6d^2ydx + 12dydx^2 + 8ydx^3 = 0.$$

Wird $y = e^{\lambda x}$ substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0,$$

welche drei gleiche Factoren: $\lambda + 2 = 0$ hat. Demnach ist $y = e^{-2x}$ ein partikulares Integral der gegebenen Gleichung.

Wird diese mit dem integrirenden Factor φ multiplicirt, so erhält man die Bedingungs-Gleichung:

$$d^3\varphi - 6d^2\varphi dx + 12d\varphi dx^2 - 8\varphi dx^3 = 0,$$

die ihrerseits drei gleiche partikulare Integrale: $y = e^{+2x}$ hat.

Es wird dadurch erhalten:

$$\frac{\partial d^2V\partial y}{\partial y} = [\varphi(P - dQ + d^2R) - d\varphi(Q - 2dR) + d^2\varphi R]\partial y$$
$$+ [\varphi(Q - dR) - d\varphi R)]\partial dy + \varphi R\partial d^2y.$$

Durch partielle Integrirung erfolgt nach Substitution der Werthe:

$$\varphi = e^{2x}, \quad d\varphi = 2e^{2x}dx, \quad d^2\varphi = 4e^{2x}dx^2,$$
$$P = 12dx^2, \quad Q = 6dx, \quad R = 1:$$

$$(1) \qquad d^2V = 4e^{2x}ydx^2 + 4e^{2x}dydx + e^{2x}d^2y - Cdx^2 = 0.$$

Würde hier die Constante $-Cdx^2$ weggelassen, so erhielte man statt des allgemeinen nur ein partikulares Integral:

$$\int d^3V = d^2V.$$

Durch Division wird $d^2V = 4ydx^2 + 4dydx + d^2y - Ce^{-2x}dx^2$, und die reducirte Gleichung: $d^2y + 4dydx + 4ydx^2 = 0$ hat zwar wieder zwei gleiche partikulare Integrale $y = e^{-2x}$; keineswegs aber gilt diess von der wirklich gefundenen Gleichung (1); aber ihr integrirender Factor wird wieder: $\varphi = e^{2x}$, und es erfolgt

$$\frac{\partial dV\partial y}{\partial y} = (\varphi P - d\varphi Q)\partial y + \varphi Q\partial dy.$$

Nach Substitution der Werthe: $\varphi = e^{2x}$, $d\varphi = 2e^{2x}dx$, $P = 4dx$, $Q = 1$ wird durch partielle Integrirung:

$$dV = 2e^{2x}ydx + e^{2x}dy - fxdx = 0.$$

Durch Differenzirung erfolgt:

$$4e^{2x}ydx^2 + 4e^{2x}dydx + e^{2x}d^2y - d(fxdx) = 0,$$

und durch Vergleichung mit (1)

$$d^2V = 4e^{2x}ydx^2 + 4e^{2x}dydx + e^{2x}d^2y - Cdx^2 = 0$$

ergiebt sich:

$$d(fxdx) = Cdx^2;\ fxdx = Cxdx + C_1dx.$$

Demnach wird

$$dV = 2e^{2x}ydx + e^{2x}dy - Cxdx - C_1dx = 0, \tag{2}$$

$$dV = 2ydx + dy - e^{-2x}(Cxdx + C_1dx) = 0.$$

Reducirt genommen hat $dy + 2ydx = 0$ das Integral: $y = e^{-2x}$, aber die wirkliche Gleichung (2) hat ein anderes Integral; doch ist ihr integrirender Factor wieder $\varphi = e^{2x}$, und es erfolgt:

$$\frac{\partial V\partial y}{\partial y} = \varphi P\partial y,$$

die durch partielle Integration in die Gleichung übergeht:

$$V = e^{2x}y - fx = 0.$$

Wird diese differenzirt, und mit

$$dV = 2e^{2x}ydx + e^{2x}dy - Cxdx - C_1dx = 0 \tag{2}$$

verglichen, so ist $d(fx) = Cxdx + C_1dx$,

$$fx = \tfrac{1}{2}Cx^2 + C_1x + C_2.$$

Es ist demnach $V = e^{2x}y - (\frac{1}{2}Cx^2 + C_1x + C_2) = 0$,
oder $y = e^{-2x}(C_2 + C_1x + \frac{1}{2}Cx^2)$ das vollständige Integral der gegebenen Differenzial-Gleichung von drei gleichen partikularen Integralen.

Zusatz 1. Da die Constanten völlig willkührlich sind, so kann man unbedingt, der leichteren Uebersicht willen C statt $\frac{1}{2}C$ setzen, und dann wird

$$y = e^{-2x}(C_2 + C_1x + Cx^2).$$

Zusatz 2. Es ist leicht zu beweisen, dass für vier oder mehr gleiche Wurzeln, wenn das partikulare Integral der gegebenen Gleichung d^nV gleich $y = e^{\lambda x}$ ist, das vollständige Integral allgemein: $y = e^{\lambda x}(C_{\nu-1} + \ldots C_2x^{n-3} + C_1x^{n-2} + C_0x^{n-1})$ sein müsse.

Zusatz 3. Damit man vollständige Integrale erhalte, kommt es darauf an, dass man bei den aufeinander folgenden Integrirungen die Constanten $C_1, C_1, C_2, \ldots$ nicht weglässt; denn dadurch erhielte man statt totaler nur partikulare Differenzial-Gleichungen niederer Ordnung und gelangte zuletzt statt zum vollständigen Integral, wieder nur zum partikularen Integral: $y = e^{\lambda x}$. Unterlässt man die Constanten beizusetzen, so ist man genöthigt den Factor:

$$C_{\nu-1} + C_{\nu-2}x + \ldots C_1x^{n-2} + C_0x^{n-1},$$

den man unbedingt braucht, beizubringen, es möge gehen, wie es wolle.

§ 27.

Eingangs ist bemerkt worden, dass die apriorischen Operationen des integrirenden Factors bei Differenzial-Gleichungen empirisch, und ohne Kenntniss des integrirenden Factors, angewendet worden sind. Diess ist bei der Behandlung der vollständigen Differenzial-Gleichungen der Fall.

Es sei gegeben:

$$Aydx^n + Bdydx^{n-1} + \ldots Md^ny = Xdx^n.$$

Hier hilft es nichts, wenn man die partikularen Integrale der reducirten Gleichung kennt und substituirt; denn es verschwinden dadurch zwar die Glieder links des Gleichheits-Zeichens, jedoch nicht auch der Ausdruck Xdx^n, so dass solche Substitutionen die Gleichung nicht gleich Null machen, also auch nicht partikulare Integrale sind. Wohl aber kann durch die Multiplication mit dem Factor φ,

$$\varphi(Aydx^n + Bdydx^{n-1} + \ldots Md^n y) = \varphi Xdx^n$$

integrirt werden, wenn φ ein partikulares Integral der integrirenden Gleichung $d^n\Phi$ ist. Denn $\int \varphi Xdx^n$ ist als Differenzial-Ausdruck unmittelbar bekannt, und das Integral der Gleichung links des Gleichheits-Zeichens wird, wenn $\varphi = e^{-\lambda_{,}x}$ substituirt wird, nach § 24:

$$\begin{aligned} d^{n-1}V = (B + \lambda_{,}C + \lambda_{,}^2 D + \ldots)e^{-\lambda_{,}x}ydx^{n-1} \\ + (C + \lambda_{,}D + \lambda_{,}^2 E + \ldots)e^{-\lambda_{,}x}dydx^{n-2} \\ + (D + \lambda_{,}E + \ldots\ldots\ldots)e^{-\lambda_{,}x}d^2ydx^{n-3} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + Me^{-\lambda_{,}x}d^{n-1}y - Cdx^{n-1}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck gleich $\int e^{-\lambda_{,}x}Xdx^n$ gesetzt liefert das vollständige Integral $d^{n-1}V$ der gegebenen Differenzial-Gleichung.

Man vergleiche mit diesen Operationen die Ableitungen Euler's, und man wird die Uebereinstimmung beider sogleich wahrnehmen. (Euler's Ableitungen werden aber gewählt, weil seit einem Jahrhundert nichts an ihnen geändert worden ist.)

§ 1138 seiner Integral-Rechnung wird die Aufgabe behandelt:

„„ Die Differenzial-Gleichung

$$X = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cd^2y}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{Nd^ny}{dx^n}$$

bei welcher das Element dx constant gesetzt ist, und X irgend eine Function von x bezeichnet, sei gegeben; man suche eine Function von x, mit welcher diese Gleichung multiplicirt integrabel wird.

Auflösung.

Sei Pdx der Multiplicator, welchen wir suchen, so muss man, da das erste Glied X durch denselben integrabel gemacht wird, dessen Beziehung aus dem andern Gliede bestimmen. Es ist aber leicht einzusehen, das $e^{\lambda x}$ die Form dieses Multiplicators P sein werde, so dass man bloss die Grösse λ zu bestimmen hat.

Sei also $e^{\lambda x}dx$ der Multiplicator, so muss der Ausdruck

$$e^{\lambda x}dx\left[Ay+\frac{Bdy}{dx}+\frac{Cd^2y}{dx^2}+\frac{Dd^3y}{dx^3}+\ldots\ldots+\frac{Nd^ny}{dx^n}\right]$$

integrabel sein. Man nehme an, das Integrale desselben sei

$$e^{\lambda x}\left[A'y+\frac{B'dy}{dx}+\frac{C'd^2y}{dx^2}+\ldots\ldots\frac{M'd^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right],$$

so dass das Differenziale hievon mit jenem Ausdrucke übereinstimmen muss. Da dieses nun

$$e^{\lambda x}dx\left\{\begin{array}{l}\lambda A'y+\frac{\lambda B'dy}{dx}+\frac{\lambda C'd^2y}{dx^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\lambda M'd^{n-1}y}{dx^{n-1}}\\ \qquad+\frac{A'dy}{dx}+\frac{B'd^2y}{dx^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{M'd^ny}{dx^n}\end{array}\right\}$$

ist, so müssen nothwendig folgende Gleichungen Statt finden:

$$A'=\frac{A}{\lambda};\quad B'=\frac{B-A'}{\lambda};\quad C'=\frac{C-B'}{\lambda};\quad D'=\frac{D-C'}{\lambda};\ldots$$

$$M'=\frac{M-L'}{\lambda}\text{ und }M'=N.$$

Man wird demnach erhalten:

$$A'=\frac{A}{\lambda}$$

$$B'=\frac{B}{\lambda}-\frac{A}{\lambda^2}$$

$$C'=\frac{C}{\lambda}-\frac{B}{\lambda^2}+\frac{A}{\lambda^3}$$

$$D'=\frac{D}{\lambda}-\frac{C}{\lambda^2}+\frac{B}{\lambda^3}-\frac{A}{\lambda^4}$$

. . . .

$$M' = \frac{M}{\lambda} - \frac{L}{\lambda^2} + \frac{K}{\lambda^3} - \ldots \pm \frac{A}{\lambda^n} \text{ und}$$

$$0 = \frac{N}{\lambda} - \frac{M}{\lambda^2} + \frac{L}{\lambda^3} - \ldots \mp \frac{A}{\lambda^{n+1}},$$

wo man aus der letzten Gleichung die Grösse λ entwickeln muss, welche Gleichung folgende Form annimmt:

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 - \ldots \pm N\lambda^n = 0,$$

und da hieraus n Werthe für λ gefunden werden, so ergeben sich auch eben so viele Multiplicatoren.

Z. B. für $n = 4$ wird $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 = 0$, dann aber ist

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2 - E\lambda^3$$

$$B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda + E\lambda^2$$

$$C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D - E\lambda$$

$$D' = \frac{D\lambda^3 - C\lambda^2 + B\lambda - A}{\lambda^4} = E.$$

&c. &c. ““

Die Uebereinstimmung ist deutlich.

Die Gleichung: $\frac{N}{\lambda} - \frac{M}{\lambda^2} + \frac{L}{\lambda^3} - \ldots \mp \frac{A}{\lambda^{n+1}} = 0$ entspricht der Bedingungs-Gleichung des integrirenden Factors $d^n\Phi = 0$; die Gleichungen A'; B'; C'; ... M' entsprechen den einzelnen Gliedern der Gleichung $d^n\,{}^1V$, die der Reihe nach die Coefficienten ydx^{n-1}, $dydx^{n-2}$, d^2ydx^{n-3}, ... $d^{n-1}y$ haben.

Die abwechselnden Zeichen in Euler's Gleichungen kommen daher, dass bei ihm der integrirende Factor gleich $e^{\lambda x}$ gesetzt wird, statt $e^{-\lambda x}$, wie er in $d^n\Phi = 0$ genommen wurde. —

§ 28.

Die zweite Differenzial-Gleichung, von der Form:

$$Aydx^n + Bxdydx^{n-1} + Cx^2d^2ydx^{n-2} + \ldots + Mx^nd^ny = 0$$

hat, wie erwähnt, Gleichungen: $y = x^\mu$ zu partikularen Integralen. Werden diese substituirt, so fällt in allen Gliedern: $x^\mu dx^n$ durch Division aus, und es bleibt die algebraische Gleichung des n^{ten} Grades:

$$A + B\mu + C\mu.\mu - 1 + .. + M[\mu.\mu - 1.\mu - 2 + ...\mu - (n-1)].$$

Die n Wurzeln dieser Gleichung liefern die n partikularen Integrale, und ihre Summe giebt das vollständige Integral:

$$y = \mathfrak{A}x^{\mu_1} + \mathfrak{B}x^{\mu_2} + \mathfrak{C}x^{\mu_3} + \ldots \mathfrak{N}x^{\mu_\nu}.$$

§ 29.

Die integrirende Gleichung $d^n\Phi = 0$ wird durch den Factor φ gefunden. Aus

$$\varphi Aydx^n + \varphi Bxdydx^{n-1} + \ldots \varphi Mx^n d^n y = 0$$

werden nach früherer Bezeichnung abgeleitet:

$$N = \varphi Adx^n, \quad P = \varphi Bxdx^{n-1}, \quad Q = \varphi Cx^2dx^{n-2} \text{ u. s. w.}$$

Ihre Substitution in die Bedingungs-Gleichung:

$$N - dP + d^2Q - d^3R + \ldots = 0$$

giebt die integrirende Gleichung $d^n\Phi = 0$:

$$\varphi(A - 1^2B + 2C - 2.3D..) - xd\varphi(B - 2^2C + 2.3^2D...)$$
$$+ x^2d^2\varphi(C - 3^2D + ..) - .. \pm Mx^nd^n\varphi = 0.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie die gegebene d^nV; sie hat daher ebenfalls n partikulare Integrale:

$$\varphi = x^{\alpha_1}, \ \varphi = x^{\alpha_2}, .. \ \varphi = x^{\alpha_\nu}.$$

Jedes dieses Integrale ist integrirender Factor von d^nV, und es können auch hier wieder n verschiedene Differenzial-Gleichungen der $(n-1)^{ten}$ Ordnung abgeleitet werden, je nachdem das eine oder andere partikulare Integral als Factor genommen wird.

Jede dieser Gleichungen enthält die in der ersten Integration nicht verwendeten $(n-1)$ partikularen Integrale, und sohin kann mit Leichtigkeit zur n^{ten} Integration fortgeschritten werden, die endlich das vollständige Integral liefert.

Auch hier stimmen Euler's Ableitungen mit den apriorischen Operationen des integrirenden Factors überein, wie die Vergleichung mit Integral-Rechnung II., Cap. 5 zeigt, worauf wir verweisen.

§ 30.

Ist die gegebene Gleichung d^nV eine reducirte, so ist diese n malige Integration nicht nothwendig, da man das vollständige Integral viel kürzer und ohne alle Integration hat. Wohl aber ist dieser Weg durch die n Integrationen nothwendig, wenn entweder die reducirte Gleichung zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat, oder wenn die Gleichung eine vollständige Differenzial-Gleichung mit dem Gliede Xdx^n ist.

In diesem Falle entsteht nach erster Integration durch den integrirenden Factor $\varphi = x^{\alpha,}$ die Differenzial-Gleichung der $n-1^{ten}$ Ordnung:

$$(d^{n-1}V) = (P - dQ + d^2R - ..)y + (Q - dR + ..)dy$$
$$+ (R - dS...)d^2y + ... Mx^{\alpha, + n}d^{n-1}y = C_,dx^{n-1} + \int x^{\alpha,} X dx^n.$$

Werden die Werthe:

$$P = Bx^{\alpha, + 1}dx^{n-1};\ Q = Cx^{\alpha, + 2}dx^{n-2};\ R = Dx^{\alpha, + 3}dx^{n-3};...$$

substituirt, so geht die Gleichung in folgende über:

$$[B - (\alpha, + 2)\,C + (\alpha, + 2)(\alpha, + 3)\,D - ..]x^{\alpha, + 1}ydx^{n-1}$$
$$+ [C - (\alpha, + 3)\,D + (\alpha, + 3)(\alpha, + 4)\,E - ..]\,x^{\alpha, + 2}dydx^{n-2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ Mx^{\alpha, + n}d^{n-1}y = C_,dx^{n-1} + \int x^{\alpha,}Xdx^n.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form mit der gegebenen, wenn sie durch $x^{\alpha, + 1}$ dividirt wird, wodurch die Normalform der Gleichung: erstes Glied ohne Coefficienten x, hergestellt wird, so dass es möglich ist, die übrigen bei der ersten Integration nicht verwendeten $(n-1)$ partikularen Integrale

bei der nachfolgenden Integration auf gleiche Art zu verwenden.

Geschieht diess, und bezeichnet man die Coefficienten von ydx^{n-1} mit $B_,$, von $xdydx^{n-2}$ mit $C_,$ u. s. w. so geht folgende Gleichung hervor:

$$B_,ydx^{n-1} + C_,xdydx^{n-2} + D_,x^2d^2ydx^{n-3} + \dots Mx^{n-1}d^{n-1}y =$$
$$= C_,x^{-(\alpha_,+1)}dx^{n-1} + x^{-(\alpha_,+1)}\int x^{\alpha_,}Xdx^n.$$

Wird diese Gleichung durch den zweiten Factor $\varphi = x^{\alpha_2}$ multiplicirt, so entsteht rechts des Gleichheits-Zeichens:

$$C_,x^{\alpha_2-(\alpha_1+1)}dx^{n-1} + x^{\alpha_2-(\alpha_1+1)}\int x^{\alpha_,}Xdx^n.$$

Wird die ganze Gleichung auf die nämliche Art, wie vorher integrirt, und in ihrer Normalform hergestellt, also durch x^{α_2+1} dividirt, so erfolgt:

$$B_2ydx^{n-2} + C_2xdydx^{n-3} + D_2x^2d^2ydx^{n-4} + \dots Mx^{n-2}d^{n-2}y =$$
$$= C_{,,}x^{-(\alpha_2+1)}dx^{n-2} + x^{-(\alpha_2+1)}\int C_,x^{\alpha_2-(\alpha_1+1)}dx^{n-1} +$$
$$+ x^{-(\alpha_2+1)}\int x^{\alpha_2-(\alpha_1+1)}\int x^{\alpha_1}Xdx^n.$$

Endlich entsteht nach letzter Integration durch den letzten Factor $\varphi = x^{\alpha_\nu}$ die Gleichung:

$$\text{(I)}\quad My = C_\nu x^{-(\alpha_\nu+1)} + x^{-(\alpha_\nu+1)}\int C_{\nu-1}x^{\alpha_\nu-(\alpha_{\nu-1}+1)}dx +$$
$$+ x^{-(\alpha_\nu+1)}\left[\int C_{\nu-2}x^{\alpha_\nu-(\alpha_{\nu-1}+1)}\int C_{\nu-3}x^{\alpha_{\nu-1}-(\alpha_{\nu-2}+1)}dx^2\right] + \dots$$
$$+ x^{-(\alpha_\nu+1)}\left[\int x^{\alpha_\nu-(\alpha_{\nu-1}+1)}\int\dots\int x^{\alpha_,}Xdx^n\right],$$

welche das vollständige Integral darstellt.

Werden eine oder mehrere Constanten: $C_1, C_2, \dots C_{\nu-1}, C_\nu$ gleich Null, so entstehen bloss die partikularen Integrale, die demnach in beliebiger Combination dargestellt werden können.

Werden alle Constanten bis auf C_ν gleich Null gesetzt, so erhält man ein einfaches partikulares Integral der gegebenen Gleichung $d^n V = 0$,

$$My_\nu = C_\nu x^{-(\alpha_\nu+1)} + x^{-(\alpha_\nu+1)} \left[\int x^{\alpha_\nu-(\alpha_{\nu-1}+1)} \int \ldots \int x^{\alpha_1} X dx^n\right]$$

Zusatz. Hat die gegebene Gleichung $d^n V$ mehrere gleiche partikulare Integrale, z. B. x^{μ_ν} und $x^{\mu_\nu - 1}$, $x^{\mu_\nu - 2}$ so hat auch die integrirende Gleichung eben so viele gleiche partikulare Integrale $\varphi_\nu = x^{\alpha_\nu}$, $\varphi_{\nu-1} = x^{\alpha_{\nu-1}}$, $\varphi_{\nu-2} = x^{\alpha_{\nu-2}}$. Ist diess der Fall, so werden in allen Gliedern die Factòren

$$x^{\alpha_\nu - (\alpha_{\nu-1}+1)}, \quad x^{\alpha_{\nu-1} - (\alpha_{\nu-2}+1)} \quad \text{u. s. w.}$$

gleich x^{-1}, und die Integration giebt Logarithmen und Potenzen von Logarithmen, da die Integrale:

$$\int x^{-1} dx = \log x\,; \quad \int x^{-1} \log x dx = \tfrac{1}{2} (\log x)^2 \quad \text{u. s. w.}$$

hervorgehen.

In der gewöhnlichen Behandlung machen bekanntlich die gleichen partikularen Integrale sehr viele Schwierigkeiten. In den Operationen des integrirenden Factors werden diese Resultate ausserordentlich einfach gefunden, und zwar macht es keinen Unterschied, ob die gegebene Gleichung lauter gleiche, oder gleiche und ungleiche, partikulare Integrale hat, noch auch, ob $d^n V$ reducirt oder vollständig ist.

§ 31.

Erläuterndes Beispiel.

Sei gegeben:

$$d^3 V = x^3 d^3 y + 9x^2 d^2 y dx + 19 x dy dx^2 + 8 y dx^3 = 0.$$

Die drei partikularen Integrale dieser Gleichung sind einander gleich, sie sind sämmtlich $y = x^{-2}$, wie eine leichte Rechnung zeigt.

Die durch φ gebildete Gleichung wird:

$$d^3\Phi = x^3 d^3\varphi + xd\varphi dx^2 - \varphi dx^3 = 0\,,$$

aus welcher die Gleichung:

$$\alpha\,.\,\alpha - 1\,.\,\alpha - 2 + \alpha - 1 = \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0$$

gebildet wird, die drei gleiche partikulare Integrale $\varphi = x$ hat.

Es wird demnach:

$$d^2V = [\varphi P - d(\varphi Q) + d^2(\varphi R)]y$$
$$+ [(\varphi Q) - d(\varphi R)]dy + \varphi R d^2y - C_i dx^2 = 0.$$

Da $\varphi P = 19x^2dx^2$, $\varphi Q = 9x^3dx$, $\varphi R = x^4$ ist, so wird

$$d^2V = x^4d^2y + 5x^3dydx + 4x^2ydx^2 - C_1dx^2 = 0,$$

und in der Normalform, durch x^2 dividirt:

$$d^2V = x^2d^2y + 5xdydx + 4ydx^2 - C_1x^{-2}dx^2 = 0.$$

Die partikularen Integrale der reducirt genommenen Gleichung

$$x^2d^2y + 5xdydx + 4ydx^2 = 0$$

sind wieder einander gleich, $y = x^{-2}$; die integirende Gleichung

$$d^2\Phi = x^2d^2\varphi - xd\varphi dx + \varphi dx^2 = 0$$

hat wieder zwei gleiche partikulare Integrale $\varphi = x$.

Daraus wird gefunden:

$$dV = [\varphi P - d(\varphi Q)]y + \varphi Q dy - C_2dx - \int \varphi C_1 x^{-2}dx^2$$

oder da $\varphi P = 5x^2dx$, $\varphi Q = x^3$ ist, so wird:

$$dV = 2x^2ydx + x^3dy - C_2dx - C_1\log x dx = 0$$

und in der Normalform:

$$xdy + 2ydx - C_2x^{-2}dx - C_1x^{-2}\log xdx.$$

Die Gleichung mit φ multiplicirt giebt:

$$\varphi(xdy + 2ydx - C_2x^{-2}\,dx - C_1x^{-2}\log xdx),$$

die integrirende Gleichung wird: $d\Phi = \varphi dx - xd\varphi = 0$, also wieder $\varphi = x$.

Daraus wird

$$V = \varphi Py - C_3 - C_2\int \varphi x^{-2}dx - C_1\int \varphi x^{-2}\log xdx = 0$$

$$V = x^2y - C_3 - C_2\log x - \tfrac{1}{2}C_1(\log x)^2 = 0,$$

oder $y = x^{-2}[C_3 + C_2\log x + \tfrac{1}{2}C_1(\log x)^2]$.

Es tritt demnach statt des bloss partikularen Integrals: $y = \mathfrak{A}x^{-2} + \mathfrak{B}x^{-2} + \mathfrak{C}x^{-2}$ das vollständige Integral ein: $y = x^{-2}[C_3 - C_2 \log x - \frac{1}{2}C_1(\log x)^2]$.

§ 32.

Die Eigenschaft der reducirten linearen Differenzial-Gleichungen von der Form:

$$Aydx^n + Bxdydx^{n-1} + Cx^2d^2ydx^{n-2} + \dots Mx^nd^ny = 0$$

nämlich, dass: $y_1\varphi_1 = x^{-1}c$ ist, worin y_1 und φ_1 je correspondirende partikulare Integrale der Gleichungen d^nV und $d^n\Phi$ sind, könnte aus dem Coefficientenbau der beiden Gleichungen bewiesen werden; viel kürzer und einfacher erfolgt diess jedoch aus Formel (§ 30)

$$My_\nu = C_\nu x^{-(\alpha_\nu+1)} + x^{-(\alpha_\nu+1)}\left[\int \dots \int \dots \int x^{\alpha_1}Xdx^n\right]$$

Für $X = 0$, wird: $My_\nu = C_\nu x^{-(\alpha_\nu+1)}$, und diess ist der letzte durch den letzten integrirenden Factor x^{α_ν} hergestellte partikulare Werth y_ν.

Diese Gleichung entsteht, wenn in den successiven Integrationen: C_1, C_2, $C_3 \dots C_{\nu-1}$ gleich Null gesetzt werden, wodurch aus dem vollständigen Integral

$$y = \mathfrak{A}x^{\mu_1} + \mathfrak{B}x^{\mu_2} + \dots \mathfrak{M}x^{\mu_\nu - 1} + \mathfrak{N}x^{\mu_\nu}$$

sämmtliche partikulare Integrale bis auf $\mathfrak{N}x^{\mu_\nu}$ ausfallen. Es ist demnach $y = \mathfrak{N}x^{\mu_\nu}$. Eben so ist $\varphi_\nu = x^\alpha$ und $My_\nu = C_\nu x^{-(\alpha_\nu+1)}$. Ihr Product giebt: $My_\nu\varphi_\nu = C_\nu x^{-1}$, was zu beweisen war.

Zusatz 1. Dasselbe gilt für jedes Paar correspondirender Werthe, die wir mit η und χ bezeichnen wollen. Da die Ordnung der Integration durch die integrirenden Factoren χ_1, χ_2, $\chi_3, \dots \chi_\nu$ willkührlich ist, also jedes partikulare Integral aus der letzten Integration hervorgehen kann, so gilt in diesem Sinne allgemein:

$$\eta\chi = Cx^{-1}, \quad \text{oder auch } x\eta\chi = c$$

wenn statt $\eta\chi$ successiv die coordinirten Werthe

$$\eta_1\chi_1;\quad \eta_2\chi_2;\quad \eta_3\chi_3 \cdots \eta_\nu\chi_\nu$$

gesetzt werden.

So hat z. B. die Gleichung

$$d^3V = 4x^3d^3y + 8x^2d^2ydx - xdydx^2 + ydx^3 = 0$$

die drei partikularen Integrale,

$$\eta_1 = x^{-\frac{1}{2}};\quad \eta_2 = x^{\frac{1}{2}};\quad \eta_3 = x,$$

die aus der Hilfsgleichung gefunden werden:

$$4\mu^3 - 4\mu^2 - \mu + 1 = 0.$$

Die aus d^3V gebildete integrirende Gleichung:

$$d^3\Phi = 4x^3d^3\chi + 28x^2d^2\chi dx + 39xd\chi dx^2 + 6\chi dx^3 = 0$$

hat aus ihrer Hilfsgleichung:

$$4\alpha^3 + 16\alpha^2 + 19\alpha + 6 = 0,$$

die partikularen Integrale

$$\chi_1 = x^{-\frac{1}{2}};\quad \chi_2 = x^{-\frac{3}{2}};\quad \chi_3 = x^{-2}.$$

Es folgt nun $\eta_1\chi_1 = \eta_2\chi_2 = \eta_3\chi_3 = x^{-1}$.

Zusatz 2. Für die Gleichungs-Gruppe mit constanten Coefficienten wurde die Gleichung $\eta\chi = c$ gefunden. Es sind demnach für zwei Gruppen linearer Differenzial-Gleichungen zwei Gleichungen gefunden worden: $\eta\chi = c$, und $x\eta\chi = c$, durch die man auf den Gedanken geführt wird, ob sie sich nicht etwa ähnlich, wie die Coordinaten-Gleichungen der Curven verhalten. So wie durch diese die Curven jeder Klasse charakterisirt werden, so könnten durch sie, als Integral-Coordinaten, die linearen Differenzial-Gleichungen jeder Klasse charakterisirt werden. Doch scheinen solcherlei Gleichungen einen grösseren Spielraum zu haben, als die algebraischen Coordinaten-Gleichungen, was hier nicht weiter verfolgt wird. Und so schliessen wir diese Erörterungen, alles Uebrige den speciellen Untersuchungen überlassend.

V.

Integration der allgemeinen linearen Differenzial-Gleichungen.

§ 33.

Gegeben sei die Gleichung des ersten Grades:

$$dV = dy + X_0 y dx + X dx = 0,$$

die schlechthin allgemein ist, wenn X und X_0 beliebige Functionen von x bezeichnen. Das erste Glied, dy, könnte zwar noch den Coefficienten X_1 haben, doch wird dieser durch Division weggeschafft, und die Coefficienten der übrigen Glieder bleiben allgemeine Functionen von x.

Der integrirende Factor sei φ, dann folgt aus:

$$\varphi dy + \varphi X_0 y dx + \varphi X dx = 0$$

die Bedingungs-Gleichung $N - d\mathrm{P} = 0$, $\varphi X_0 dx - d\varphi = 0$,

und daraus das partikulare Integral: $\varphi = e^{\int X_0 dx}$.

Nun ist $\dfrac{\partial V \partial y}{\partial y} = P \partial y$; $V = y e^{\int X_0 dx} + fx = 0$.

Durch Differenzirung und Vergleichung mit dV wird gefunden:

$$d(fx) = X dx e^{\int X_0 dx}, \quad fx = \int X dx e^{\int X_0 dx} + C,$$

so dass: $y e^{\int X_0 dx} + \int X dx e^{\int X_0 dx} + C = 0$, das vollständige und schlechthin allgemeine Integral der gegebenen Gleichung ist.

Es wird sich ergeben, dass unter allen Integralen sämmtlicher Differenzial-Gleichungen diess das einzige schlechthin allgemeine Integral ist.

§ 34.

Weil die Gleichung des ersten Grades allgemein integrirt werden kann, wird auch die Auflösung der Aufgabe möglich: das vollständige Integral einer reducirten allgemeinen Differenzial-Gleichung des zweiten Grades zu finden, wenn eines ihrer partikularen Integrale $y = y_{,}$ bekannt ist.

Auflösung. Nach § 20 ist $y = y_{,}$ ein integrirender Factor der aus d^2V gebildeten Bedingungs-Gleichung $d^2\Phi$. Diese kann demnach integrirt werden und aus $d\Phi$ wird φ der integrirende Factor von d^2V gefunden. Aus der partiellen Integration geht dV hervor, eine Gleichung des ersten Grades, die integrirt das vollständige Integral von d^2V liefert.

Die allgemeine Formel wird:

$$d^2V = d^2y + X_1 dydx + X_0 dx^2 = 0.$$

Die aus ihr mittelst des Factors φ gebildete Gleichung wird:

$$d^2\Phi = d^2\varphi - X_1 d\varphi dx + \left(X_0 - \frac{dX_1}{dx}\right)\varphi dx^2 = 0.$$

Ihr integrirender Factor ist $y_{,}$.

Daraus folgt: $$\frac{\partial d\Phi \partial\varphi}{\partial\varphi} = (P - dQ)\partial\varphi + Q\partial d\varphi.$$

Da $P = -y_{,}X_{,}dx$, $Q = y_{,}$ ist, so wird

$$\frac{\partial d\Phi\partial\varphi}{\partial\varphi} = (-y_{,}X_{,}dx - dy_{,})\partial\varphi + y_{,}\partial d\varphi,$$

$$d\Phi = (-y_{,}X_{,}dx - dy_{,})\varphi + y_{,}d\varphi = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{dy_{,}}{y_{,}} = X_{,}dx;\quad \frac{\varphi}{y_{,}} = e^{\int X_1 dx};\quad \varphi = y_{,}e^{\int X_1 dx}.$$

Dieser Werth als integrirender Factor von d^2V giebt:

$$\frac{\partial dV\partial y}{\partial y} = (P - dQ)\partial y + Q\partial dy;$$

oder da $P = \varphi X_, dx$; $Q = \varphi$ ist,

$$dV = y(\varphi X_, dx - d\varphi) + \varphi dy + Cdx = 0, \text{ und } \varphi = y_, e^{\int X_, dx}$$

substituirt:

$$dV = y(y_, e^{\int X_, dx} X_, dx - dy_, e^{\int X_, dx} - y_, e^{\int X_, dx} X_, dx) + y_, e^{\int X_, dx} dy + Cdx = 0$$

$$dV = -ydy_, + y_, dy + Ce^{-\int X_, dx} = 0,$$

eine Gleichung des ersten Grades, die leicht integrirt werden kann.

Ihr integrirender Factor sei ψ', dann wird

$$N - dP = -\psi' dy_, - d(\psi' y_,) = 0$$

woraus $\psi^1 = y_,^{-2}$ gefunden wird.

Durch diesen Factor die Gleichung dV integrirt, giebt:

$$\frac{\partial V}{\partial y} \partial y = P \partial y = y'^{-1} \partial y; \quad V = y_,^{-1} y + fx.$$

Durch Differenzirung und Vergleichung mit dV wird

$$d(fx) = \frac{Cdxe^{-\int X_, dx}}{y_,^2}; \quad fx = C_, + \int \frac{Cdxe^{-\int X_, dx}}{y_,^2}$$

gefunden und das vollständige Integral ist:

$$yy_,^{-1} + C_, + \int \frac{Cdxe^{-\int X_, dx}}{y_,^2}, \text{ oder } y + C_, y_, + y_, \int \frac{Cdxe^{-\int X_, dx}}{y_,^2} = 0.$$

Zusatz 1. Sind von einer Gleichung des dritten Grades d^3V zwei partikulare Integrale $y_,$, $y_{,,}$ bekannt, so sind sie integrirende Factoren der aus d^3V gebildeten Gleichung $d^3\Phi$, die demnach durch den einen Factor auf $d^2\Phi$ und durch den andern auf $d\Phi$ zurückgebracht wird. Ein erstes partikulares Integral von $d^3\Phi$ liefert den zweiten integrirenden Factor $\varphi_{,,}$ von d^3V, und reducirt d^3V auf d^2V. Ein dritter Factor $\varphi_{,,,}$ wird aus dem zweiten partikularen Integral der gegebenen Gleichung d^3V gefunden und bringt d^2V auf Gleichung dV, die integrirt das vollständige Integral von d^3V liefert. Das dritte partikulare Integral von $d^3\Phi$ liefert den ersten integri-

rirenden Factor, der dem ersten partikularen Integral von d^3V entspricht. Diess ist einleuchtend, denn die Ordnung der correspondirenden Factoren: $y_{,}\varphi_{,}, \ y_{,,}\varphi_{,,}, \ y_{,,,}\varphi_{,,,} \dots$ geht nicht von $d^3\Phi$ auf d^3V, sondern von d^3V auf $d^3\Phi$. Da nun der Natur der Aufgabe nach von $d^3\Phi$ begonnen werden muss, so muss die Ordnungszahl der Factoren φ um eine Einheit zurückgerückt werden.

Zusatz 2. Wenn überhaupt $n-1$ partikulare Integrale von d^nV bekannt sind, so kann durch die Operationen der integrirenden Factoren jederzeit dV hergestellt werden, das integrirt das vollständige Integral liefert.

§ 35.

Anders verhält es sich jedoch, wenn nur $(n-2)$, oder weniger als $(n-2)$, partikulare Integrale einer Gleichung des n^{ten} Grades bekannt sind. Denn durch $(n-2)$ Factoren kann die aus Gleichung d^nV gebildete Gleichung $d^n\Phi$ nur auf $d^2\Phi$, durch $(n-3)$ Factoren nur auf $d^3\Phi$, durch $(n-\mu)$ Factoren nur auf $d^\mu\Phi$ reducirt werden.

Kann man daher eine Gleichung des 2ten Grades nicht allgemein integriren, so kann aus $d^2\Phi$ ein integrirender Factor φ' nicht hergestellt werden, und um so weniger kann diess bei $d^3\Phi \dots d^\mu\Phi$ geschehen.

Beispiel. Gegeben sei:

$$d^3V = d^3y + \frac{6d^2ydx}{x} + \frac{6dydx^2}{x^2} - \lambda^3ydx^3 = 0,$$

und es sei ein partikulares Integral: $y' = x^{-2}e^{\lambda x}$ bekannt.

Wird aus d^3V die Bedingungs-Gleichung $d^3\Phi$ gebildet, so ist sie:

$$d^3\varphi - \frac{6d^2\varphi dx}{x} + \frac{18d\varphi dx^2}{x^2} - \left(\frac{24}{x^3} - \lambda^3\right)\varphi dx^3 = 0.$$

Für diese ist $y_{,} = x^{-2}e^{\lambda x}$ ein integrirender Factor, und nach den bekannten Operationen wird

$$d^2\Phi = (P - dQ + d^2R)\varphi + (Q - dR)d\varphi + Rd^2\varphi = 0$$

wenn sie partikular genommen wird, was hinreichend ist.

Wird $P = \frac{18y_{,}dx^2}{x^2}$, $Q = -\frac{6y_{,}dx}{x}$, $R = y$, und $y_{,} = x^{-2}e^{\lambda x}$ substituirt, so erfolgt nach vorhergehender Division aller Glieder durch $x^{-2}e^{\lambda x}$ die Gleichung

$$d^2\Phi = d^2\varphi - \left(\frac{4}{x} - \lambda\right)d\varphi + \left(\frac{6}{x^2} + \frac{2\lambda}{x} + \lambda^2\right)\varphi = 0.$$

Da kein zweites partikulares Integral $y_{,,}$ gegeben ist, so müsste $d^2\Phi$ unmittelbar integrirt werden können, wenn das vollständige Integral von d^2V hergestellt werden soll.

Es kommt also alles darauf an, ob eine Gleichung des zweiten Grades allgemein integrirt werden kann, oder nicht.

§ 36.

Gegeben sei die allgemeine reducirte lineare Differenzial-Gleichung des zweiten Grades:

(I.) $$d^2V = d^2y + X_{,}dydx + X_0 ydx^2 = 0.$$

Ihr integrirender Factor sei φ, dann wird:

(II.) $$d^2\Phi = d^2\varphi - X_{,}d\varphi dx + \varphi(X_0 dx - dX_{,})\,dx = 0.$$

Diese Gleichung ist selbst eine allgemeine lineare Differenzial-Gleichung des zweiten Grades, so dass durch den integrirenden Factor für die Integration der gegebenen Gleichung nichts gewonnen ist.

Gehen wir nun weiter zur Formel:

$$\frac{\partial dV\partial y}{\partial y} = (P - dQ)\partial y + Q\partial dy,$$

so ergiebt sich, da $P = \varphi X_{,}dx$, $Q = \varphi$ ist:

$$\frac{\partial dV\partial y}{\partial y} = (\varphi X_{,}dx - d\varphi)\partial y + \varphi\partial dy,$$

und durch partielle Integration:

(III.) $$dV = (\varphi X_{,}dx - d\varphi)y + \varphi dy + fxdx.$$

Durch Differenzirung und Vergleichung mit d^2V folgt, dass fx eine Constante ist, und dass Gleichung III wirklich das

Integral von I ist, denn sie giebt differenzirt die Gleichung I, (wenn $\varphi d^2y + \varphi X_, dxdy = - \varphi X_0 ydx^2$ substituirt wird); das vollständige Integral wird demnach

(IV.) $$dV = (\varphi X_, dx - d\varphi)y + \varphi dy + C_, dx = 0,$$

ein Integral, das sogleich ausgeführt werden könnte, wenn φ bekannt wäre.

Integrirt man dV durch den neuen integrirenden Factor ψ, so wird:

$$\psi(\varphi X_, dx - d\varphi)y + \psi\varphi dy + \psi C_, dx = 0$$

und es ist: $N = \psi\varphi X_, dx - \psi d\varphi$, $P = \psi\varphi$.

Daraus folgt die Bedingungs-Gleichung: $N - dP = 0$

(V.) $$\psi\varphi X_, dx - 2\psi d\varphi - \varphi d\psi = 0,$$

aus welcher allerdings $\psi = \varphi^{-2} e^{\int X_, dx}$ bestimmt werden kann.

Gehen wir endlich zur Gleichung:

$$\frac{\partial V \partial y}{\partial y} = P\partial y = \psi\varphi\partial y, \quad \text{so wird} \quad V = \psi\varphi y + fx$$

durch Differenzirung und Vergleichung mit (IV), folgt

$$fx = \int C_, \psi dx.$$

Es ist daher, wenn $\psi = \varphi^{-2} e^{\int X_, dx}$ substituirt wird

(VI.) $$V = y\varphi^{-1} e^{\int X_, dx} + \int C_1 \varphi^{-2} e^{\int X_, dx} + C_2 = 0.$$

Diess ist das vollständige Integral der gegebenen Gleichung, das sogleich ausgeführt werden könnte, wenn φ bekannt wäre. Da diess nicht der Fall ist, kann die Gleichung durch den integrirenden Factor nicht integrirt werden. — Ob diess vielleicht auf irgend eine andere Art möglich sei, könnte dahin gestellt bleiben, wenn nicht stark zu vermuthen wäre, dass der Zufall des empirischen Experiments das nicht geben könne, was die apriorische Ableitung nicht giebt.

§ 37.

Wohl kein Problem der gesammten Wissenschaft ist mit so grossen und so reichen Hülfsmitteln so oft und so vielfach in Angriff genommen worden, wie gerade dieses Problem, und zwar von Entdeckung der Integral-Rechnung an bis auf unsere Tage.

Die grossen Entdecker Newton und Leibnitz konnten allerdings von der fortschreitenden Wissenschaft Alles erwarten; aber nach einem Jahrhundert ruhmreichen Fortschritts sah sich Euler, der auf der Höhe seiner Zeit und seiner Wissenschaft stand, am Schlusse der Integrations-Versuche der Gleichungen zweiter Ordnung zu der Bemerkung veranlasst, „dass wir noch weit von der Auflösung allgemeiner Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung entfernt seien, und dass es noch unentschieden zu sein scheine, ob dieses Problem jemals gelöst werden könne."

Und wieder nach einem Jahrhundert nicht minder grosser Fortschritte in den Integrations-Methoden, ist man in unsern Tagen nicht bloss zu der Einsicht gekommen, dass daran nicht gedacht werden könne, was noch Euler unentschieden liess, (dass die allgemeinen, also auch die nicht-linearen Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung integrirt werden können;) sondern es wird gegenwärtig wohl allgemeine Ueberzeugung sein, dass nicht einmal die allgemeinen linearen, also die einfachsten, Gleichungen zweiter Ordnung integrirt werden können, obwohl noch nie der Versuch gemacht wurde, diess in einem Lehrsatze festzustellen. Denn das ist noch kein ernster Versuch, wenn zu diesem Beweise aufgefordert wird.

Allerdings ist es nun im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass ein geschlossenes Integral der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung existire, da schon so viele und so verschiedene Integrale einzelner Gleichungen zweiter Ordnung bekannt sind, so dass nicht einzusehen ist, wie es eine allgemeine Formel geben könne, und wie sie beschaffen sein müsse, um im Stande zu sein, so viele und so verschiedene, sämmtlich aus ihr ableitbare, specielle Fälle zu enthalten.

Der Beweis eines bloss negativen Resultats hat nichts Anziehendes, da man vielmehr das Gegentheil beweisen zu können wünscht. Wahrscheinlich war diess auch der Grund, warum der Beweis der Nicht-Existenz des geschlossenen Integrals der Gleichungen zweiter Ordnung niemals versucht wurde. Was nützt es zu wissen, dass man etwas nicht erreichen könne, so lange man das Ziel für wünschenswerth hält? Blosse Negation, ohne einen positiven Geistesgewinn, der das Wünschenswerthe rectificirt, scheint ziemlich werthlos zu sein. Und nur in der Hoffnung, dass sich denn doch ein positiver Gewinn ergeben werde, versuche ich es, den Beweis der Nicht-Existenz eines geschlossenen Integrals der Gleichungen zweiter Ordnung zu führen.

§ 38.

Wohl zahllos sind die Substitutionen, die gemacht wurden, um aus ihnen die Integration der Gleichung

$$d^2y + X_1 dydx + X_0 ydx^2 = 0$$

zu erhalten. Die Menge dieser Versuche giebt eben den grösseren Werken über Integral-Rechnung das so bunte und unsystematische Aussehen.

Es kann nicht unsere Absicht sein, diese versuchten Substitutionen um eine neue ihrer Art zu vermehren, denn wir kennen bereits eine Substitution anderer Art, die allein das vollständige Integral von (I) liefert.

Diess ist Formel (VI):

$$y\varphi^{-1}e^{\int X_1 dx} + \int C_1 \varphi^{-2} e^{\int X_1 dx} + C_2 = 0.$$

Denn diese Formel hat zwei Constanten, und giebt, zweimal differenzirt die Gleichung (I), ist also ihr vollständiges Integral. Jede von Formel (VI) abweichende Substitution führt demnach nothwendig vom Ziele ab, statt zu ihm hin.

Es kommt nun darauf an, um Gleichung (VI) in einem geschlossenen Ausdruck der gegebenen Grössen X_0 und X_1 her-

stellen zu können, für φ passende Substitutionen zu ermitteln. Da φ nur eine Function der Coefficienten X_0 und X_1 sein kann, so sei allgemein $\varphi = f(X_0, X_1)$. Welche Combination man nun auch wählen möge, so werden jederzeit durch Gleichung $(d^2 \Phi)$ die Grössen X_0 und X_1 von einander abhängig. Denn die Substitution $\varphi = f(X_0, X_1)$ in Gleichung II

$$d^2\varphi - X_1 d\varphi dx + (X_0 dx - dX_1)\varphi dx = 0, \text{ giebt:}$$

$$d^2 f(X_0, X_1) - X_1 df(X_0, X_1)dx + f(X_0, X_1)(X_0 dx - dX_1)dx = 0.$$

Diess ist eine einzige Gleichung für zwei Grössen X_0, X_1, die dadurch von einander abhängig werden, und nicht mehr willkührlich genommen werden können. Wird z. B. X_0 willkührlich genommen, so ergiebt sich X_1 aus obiger Gleichung, und kann nicht mehr willkührlich und allgemein genommen werden.

Wie man auch die Substitution wählen möge, immer sind die Grössen X_0, X_1 durch $d^2\Phi$ von einander abhängig, d. h. die aus solcher Substitution erfolgende Gleichung (II) hat einen bestimmten Coefficientenbau und wird eine besondere Gleichung. Eine besondere Gleichung (II) bedingt aber auch rückwirkend eine besondere Gleichung (I), da die Coefficienten X_0 und X_1 von einander abhängig sind. Besondere Gleichungen können integrirt werden und sind schon unzählige integrirt worden, aber die allgemeine Gleichung kann nicht allgemein, d. h. für alle Fälle zugleich integrirt werden, da jede Substitution nur einen einzigen Fall integrirt.

Diess war auch das schliessliche Resultat aller versuchten Substitutionen, was sich voraussehen liess, da alle empirisch versuchten Substitutionen nur Fragmente der apriorischen und allgemeinen Operationen des integrirenden Factors sein können.

§ 39.

Dasselbe Resultat lässt sich noch durch eine zweite Formel beweisen. — Da es zu viel verlangt ist, von einer Differenzial-Gleichung des zweiten Grades sogleich zum Integral zu gelangen, und da man zufrieden sein kann, wenn man eine Differenzial-

Gleichung der ersten Ordnung trifft, die differenzirt die gegebene Gleichung (I) giebt, (weil man von ihr aus das vollständige Integral findet;) so kann man Substitutionen solcher Differenzial-Gleichungen erster Ordnung versuchen, und sie sind in der That schon oft versucht worden.

Die einzige Substitution, die hier zum Ziele führen kann ist in Formel (IV) gegeben:

$$(\varphi X_1 dx - d\varphi)y + \varphi dy + C dx = 0.$$

B e w e i s. Die Formel (IV) giebt differenzirt die gegebene Gleichung (I), wie bei der Ableitung dieser Formel bewiesen wurde, und da sie eine C o n s t a n t e hat, so ist sie das vollständige erste Integral von I.

Soll nun irgend eine andere Substitution, die nothwendig die Form: $\Xi_1 dy + \Xi_0 y dx + C dx = 0$ hat, Integral von I werden, so muss sie mit IV i d e n t i s c h sein, denn es giebt nicht zwei verschiedene vollständige Integrale einer und derselben Differenzial-Gleichung. Es kann demnach keine zum Ziele führende Substitution von Formel IV verschieden sein.

Also versucht man in

$$(\varphi X_1 dx - d\varphi)y + \varphi dy + C dx = 0$$

eine Function von X_0 und X_1, $\varphi = f(X_0, X_1)$, die zum Ziele führt, zu substituiren; und hier ist leicht zu zeigen, d a s s e i n e s o l c h e F u n c t i o n n i c h t e x i s t i r t.

Jede bestimmte Function z. B. $\varphi = X_0 \pm X_1$ $\varphi = X_0 e^{X_1}$ &c. macht in Gleichung II substituirt den Werth X_0, X_1 von einander a b h ä n g i g, da sie substituirt eine e i n z i g e Gleichung giebt, und in einer e i n z i g e n Differenzial-Gleichung die Veränderlichen von einander abhängig sind, wie schon im Vorhergehenden erörtert wurde. Durch eine solche Substitution verliert also Gleichung I ihre Allgemeinheit, und erhält einen bestimmten und besondern Coefficientenbau. Man mag also eine Substitution versuchen, welche mau wolle, so wird man stets nur eine bestimmte Gleichung, wie sie eben aus der Substitution erfolgt, nicht aber die a l l g e m e i n e Gleichung integriren, was zu beweisen war.

Erläuterung. Da der integrirende Factor φ durch Gleichung (II) von X_0 und X_1 abhängig ist, und da die allgemeinen Coefficienten X_0 und X_1 schlechthin unendlich viele Werthe haben, so muss φ selber unendlich viele Werthe haben, und jede bestimmte Substitution giebt nur einen der unendlich vielen Werthe von φ, nicht aber auch die übrigen, und führt dadurch zu einer besondern, und nicht zur allgemeinen Differenzial-Gleichung zweiter Ordnung. Es ist gerade so, als wenn man versuchte, z. B. die Quadratur: $\int ydx$ durch Substitution von $y = fx$ allgemein auszuführen. Da es unendlich viele Gleichungen ebener Curven giebt, so giebt jede bestimmte Function, sie möge sein, welche sie wolle, nicht die gesuchte allgemeine Fläche, sondern nur eine besondere von einer bestimmten Curve begrenzte ebene Fläche. So giebt die Substitution $y = ax$ den Flächen-Inhalt eines rechtwinklichen Dreiecks, die Substitution: $y = ax^2$, die von der Parabel begrenzte Fläche u. s. w.

Es ist daher der unumstössliche und vollkommene Beweis geliefert, dass die allgemeine Integration der allgemeinen linearen Gleichungen der zweiten Ordnung in dem Sinne, in dem sie angestrebt und erwartet wurde, nicht möglich ist. Wohl aber ist sie in einem anderen Sinne möglich und auch wirklich, und diess ist der positive Gewinn der geführten Untersuchung.

§ 40.

Wir haben ja die allgemeinen Integrale ersten und zweiten Grades der gegebenen Gleichung d^2V in Formel (IV) und (VI).

(IV) $$(\varphi X_1 dx - d\varphi)y + \varphi dy + Cdx = 0$$

(VI) $$y\varphi^{-1}e^{\int X_1 dx} + \int C_1 \varphi^{-2} e^{\int X_1 dx} + C_2 = 0$$

und ich stehe nicht an, diese Formeln in eine Linie mit den übrigen allgemeinen Differenzial- und Integral-Ausdrücken zu setzen.

Diese sind, wie bekannt, die Ausdrücke der Normalen, Tangenten, Krümmungs-Halbmesser &c., der Linien-, Flächen- und Körper-Elemente, des Schwerpunkts von Linien, Flächen und Körpern, u. s. w.

Ist denn z. B. der Krümmungs-Halbmesser

$$\varrho = -\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y}$$

zu berechnen, wenn nicht zuvor die Substitution der Gleichung zwischen x und y vollführt ist? Oder ist der Bogen: $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ durch einfache Integration; die Fläche:

$$\int_x \int_y \partial x \partial y \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]}$$

durch doppelte Integration; der Körper:

$$\int_x \int_y \int_z (dx dy dz)$$

durch dreifache Integration herzustellen, wenn nicht zuvor die Gleichungen zwischen (x, y, z) substituirt sind? Und was würden diese herrlichen Formeln überhaupt nützen, wenn man noch nicht zur Aufstellung der Coordinaten-Gleichungen gekommen wäre?

Gerade so verhält es sich mit den zwei gefundenen Formeln. Kann φ substituirt werden, entweder aus einer allgemeinen Integral-Coordinaten-Gleichung, oder aus bekannten partikularen Integralen, so ist das vollständige Integral unmittelbar durch Formel VI gegeben.

§ 41.

Es ist noch Folgendes zu erläutern:

Alle analytischen Aufgaben, die unmittelbar allgemein in Ansatz gebracht werden können, werden einfach durch Algebra gelöst. Alle Aufgaben, die nicht unmittelbar allgemein in Ansatz gebracht werden können, z. B. die Gleichung des Bogens, für die es nicht eine, sondern unendlich viele Formeln

giebt, je nachdem man den Bogen dieser oder jener Curve in einer gewöhnlichen Gleichung ausdrückt, was man kann, und was man in der synthetischen Geometrie mit unendlicher Mühe für ein paar Curven gefunden hat — solche Probleme können die Eigenschaft haben, dass sie im ersten Differenzial eine einzige, schlechthin allgemeine für alle Curven gültige Formel liefern, was aufs Höchste zu bewundern ist, und diess findet sich bei den genannten Aufgaben der Tangenten der Normalen, des Linien-Elements und andern. So ist z. B.

$$dx\sqrt{\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}\right]}$$

die schlechthin allgemeine Formel des ersten Differenzials der Linien doppelter Krümmung. Für die Linien selbst giebt es keine allgemeinen, weder algebraische noch transcendente Formeln, sondern es erfolgen durch Integration unendlich viele, je nachdem unendlich viele Coordinaten - Gleichungen zwischen x, y, z substituirt werden, welche die in der Formel bloss angedeutete Integration erst möglich machen.

Alle Aufgaben, die in Ansatz gebracht auch nicht im ersten Differenzial eine einzige allgemeine Formel, sondern unendlich viele geben, können die Eigenschaft haben, dass sie im zweiten Differenzial durch eine einzige allgemeine Formel in Ansatz gebracht werden können, und diess ist z. B. bei den allgemeinen Flächen der Fall. Und so geben die Körper erst im dritten Differenzial eine einzige schlechthin allgemeine Formel des Ansatzes.

Gerade so ist es bei den Differenzial-Gleichungen. Viele Aufgaben der Geometrie und Mechanik können unmittelbar in allgemeinen Ansatz gebracht werden, und geben bloss algebraische d. h. ohne Differenzirung und Integrirung auflösbare Formeln. Andere Aufgaben geben erst in den Gleichungen der ersten Differenzialien schlechthin allgemeine Formeln des Ansatzes; wieder andere geben noch in den Differenzialien des ersten Grades unendlich viele, aber in den Differenzialien des zweiten Grades eine einzige allgemeine Formel des Ansatzes, und

aus diesem Ansatze entstehen die Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung. Andere Aufgaben haben erst in den dritten und höheren Differenzialien die Formel des einzigen und allgemeinen Ansatzes.

Um nun bei den Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung zu bleiben, so ergiebt sich das Folgende: Könnte man die allgemeinen Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung allgemein, d. h. ohne vorherige Substitution integriren, so würden sie eine einzige schlechthin allgemeine Differenzial-Gleichung erster Ordnung liefern. Das heisst aber: Die Probleme, die man durch Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung zu lösen versucht hätte, könnten schon durch Differenzial-Gleichungen erster Ordnung gelöst werden. Wir hätten daher gar nicht zu Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung kommen sollen. Was würde man z. B. dazu sagen, wenn man das Integral der ebenen Fläche $\int ydx$, aus dem Doppel-Integral $\int\int dydx$ herleiten wollte? wenn man sich rühmte, dass $\int\int dydx$ allgemein integrirbar sei, und $\int ydx$ gebe? Das Problem führt ja ohnehin bloss zu $\int ydx$. So kann man auch allerdings den Versuch machen und eine Differenzial-Gleichung differenziren, sie unverändert lassen und dann wieder integriren, diess ist Uebung in Operationen, nicht aber Lösung eines Problems.

Es ist zwar natürlich, die Meinung zu hegen, dass die Möglichkeit allgemeiner Integration ihrer Unmöglichkeit vorzuziehen wäre; aber es ist wissenschaftlich, sich zur Ueberzeugung zu erheben, dass gerade diese Unmöglichkeit das Vorzüglichere ist, wie denn überall die objective Wahrheit das Vorzüglichste ist. Denn gerade dadurch, dass diese Gleichungen des zweiten Grades nicht allgemein integrirt werden können, ist es möglich, durch sie Probleme zu lösen, die ihrer Natur nach nur durch Differenzialien zweiter Ordnung gelöst werden können. Und man wird doch nicht die Wahrheit, dass es solche Probleme giebt, in ihr Gegentheil umändern wollen? Der Vorzug

des Differenzial-Calculs besteht eben darin, dass, wo die Algebra keine allgemeine Formel liefern kann, das erste Differenzial sie liefert, und wo das erste Differenzial diess versagt, wenn in ihm statt der gesuchten einen allgemeinen Formel noch unendlich viele Formeln erfolgen, diess das zweite Differenzial leistet, wie z. B. bei Flächen, und dass in einer kurzen Reihe von Differenzialien alle denkbaren Probleme je in einen einzigen schlechthin allgemeinen Ausdruck gefasst werden können. Diess ist das Bewunderungswürdige im Differenzial-Calcul.

§ 42.

Da bewiesen ist, dass die linearen Differenzial-Gleichungen zweiter Ordnung nicht allgemein integrirt werden können, so folgt von selbst, dass diess auch für derlei Gleichungen dritter und höherer Ordnungen gelte. Doch unterliegt es keiner Schwierigkeit, die Integrale der linearen Gleichungen dritter Ordnung durch drei Integrationen und zwei integrirende Factoren; vierter Ordnung durch vier Integrationen und drei integrirende Factoren; und überhaupt n^{ter} Ordnung durch n Integrationen und $(n-1)$ integrirende Factoren in geschlossenen Ausdrücken von X_0, X_1, $X_2 \ldots X_\nu$, $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,} \ldots \varphi_{\nu-1}$ darzustellen, was allerdings hohen theoretischen Werth hat. Die Integrale der Gleichungen dritter, vierter, .. n^{ter} Ordnung nehmen regelmässig um eine Constante, um einen Factor und um eine Integration zu, was hier nicht weiter ausgeführt wird.

§ 43.

Um den Beweis des am Anfange dieses Abschnitts aufgestellten Satzes zu vollenden, dass die allgemeine lineare Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung, die einzige allgemeine Gleichung ist, die allgemein, d. h. ohne vorhergehende Substitution integrirt werden kann, was sie der Eigenschaft verdankt, dass ihre integrirende Gleichung sogleich ein Differenzial-Ausdruck wird, — bleibt noch übrig darzuthun, dass auch

keine nicht-lineare Differenzial-Gleichung allgemein integrirt werden könne.

Sei die allgemeine nicht-lineare Differenzial-Gleichung erster Ordnung gegeben: $dV = dy + f(x,y)dx = 0$, so ist in ihr durch den integrirenden Factor:

$$N = \frac{\varphi \partial f(x,y)}{\partial y} dx\,;\; P = \varphi\,;$$

$$N - d\varphi = \frac{\varphi \partial f(x,y)}{\partial y} dx - d\varphi\,;$$

$$\varphi = e^{\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx}.$$

Bei nicht-linearen Differenzial-Gleichungen enthält $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nothwendig die Veränderliche y, während bei linearen Differenzial-Gleichung $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = X$, ist.

Nun kann wohl X, dx, nicht aber einmal ydx, und noch weniger $f(x,y)dx$ integrirt werden, wenn nicht vorher die Gleichung zwischen x und y gegeben ist. Diese soll aber gerade durch das Integral gefunden werden.

Dadurch ist der Beweis über die ausgezeichnete Stellung, welche die lineare Differenzial-Gleichung erster Ordnung unter allen Differenzial-Gleichungen einnimmt, vollständig geführt.

Zusatz Es ist bekannt, dass die nicht-linearen Differenzial-Gleichungen des ersten Grades, auch wenn sie sehr einfach sind, wenn sie z. B. bloss y^2dx, $y^3dx \ldots$ enthalten, in lineare Differenzial-Gleichungen zweiter oder höherer Ordnung umgewandelt werden, damit sie leichter integrirt werden können, und man ist glücklich, wenn eine Umwandlung nicht-linearer Gleichungen in lineare Gleichungen höherer Ordnung gelingt, was ein Mittel ihrer Vereinfachung und leichteren Integration ist. So wird z. B. die Riccati'sche Gleichung $dy + ay^2dx = bx^\mu dx$, wenn man

$y = \frac{dz}{azdx}$ setzt, in die lineare Gleichung: $d^2z - abx^{\mu}zdx^2 = 0$ umgewandelt. Eben so kann die Gleichung von sehr einfachem Coefficientenbau:

$$y^2d^2y + ydy^2 + Aydxdy + Bydx^2 + (Cx + D)dx^2 = 0$$

umgewandelt werden in die lineare Gleichung:

$$d^3z + Ad^2zdx + Bdzdx^2 + Czdx^3 = 0,$$

deren Integral $z = \mathfrak{A}x^{\lambda_1} + \mathfrak{B}x^{\lambda_2} + \mathfrak{C}x^{\lambda_3}$ unmittelbar gegeben ist.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass schon die nicht-linearen Differenzial-Gleichungen ersten Grades, wenn sie allgemein genommen werden, mehr Schwierigkeiten der Integration haben, als alle linearen Differenzial-Gleichungen zusammengenommen.

§ 44.

So wie die allgemeinen Differenzial-Ausdrücke des Bogens, der Fläche u. s. w. nicht allgemein integrirbar sind, wohl aber für die einzelnen Curven, deren Coordinaten-Gleichungen die nöthigen Substitutionen liefern; eben so können zwar nicht die allgemeinen Differenzial-Gleichungen höherer Grade allgemein integrirt werden, wohl aber die wirklich gegebenen Differenzial-Gleichungen jeden Grades, weil für sie partikulare Integrale möglich sind, durch deren Substitution das vollständige Integral hergestellt werden kann. Die nächste Aufgabe der Wissenschaft besteht demnach darin, zu untersuchen, wie die partikularen Integrale hergestellt werden können.

VI.

Herstellung der Differenzial-Gleichungen aus partikularen Integralen.

§ 45.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen ist klar, dass die relativ allgemeinen Resultate der Integration höherer Differenzial-Gleichungen von der Einführung und Verwerthung der partikularen Integrale abhängen. Der Gedanke liegt nahe, ob es nicht angezeigt sei, dass man: statt aus den Differenzial-Gleichungen die partikularen Integrale zu ermitteln, umgekehrt von partikularen Integralen ausgehend, die relativ allgemeinen Differenzial-Gleichungen aus ihnen abzuleiten versuche. Partikulare Integrale sind unmittelbar und im Ueberfluss gegeben; denn jede beliebige Function, jeder Differenzial-Ausdruck ist ein partikulares Integral irgend einer Differenzial-Gleichung; ja diese letzteren können selbst wieder als partikulare Integrale höherer Differenzial-Gleichungen verwendet werden.

Wohl ist schon versucht worden, aus sämmtlichen bekannten partikularen Integralen einer Differenzial-Gleichung diese selbst herzustellen, gleichwie man aus den Wurzeln einer Gleichung diese selbst herstellen kann. Wie die Coefficienten jedes Glieds einer algebraischen Gleichung von der Combination ihrer Wurzeln zur ersten, zweiten, dritten .. n^{ten} Classe abhängig sind, so sind auch die Coefficienten einer Differenzial-Gleichung von den partikularen Integralen abhängig, nur nicht

in so einfachen Ausdrücken, wie diess bei algebraischen Gleichungen der Fall ist.

Aus einer einzigen Wurzel $(x-\alpha)$ eine algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung zu bilden, würde sich kaum der Mühe lohnen, da augenblicklich unendlich viele solcher Gleichungen hergestellt werden können:

$$[(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,..\,x-\nu]=0,$$
$$[(x-\alpha)(x-\beta_{,})(x-\gamma_{,})\,..\,x-\nu_{,}]=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die sämmtlich die eine Wurzel $(x-\alpha)$ gemeinschaftlich haben. Aber die partikularen Integrale haben eine grössere und ausdrücklichere gegenseitige Abhängigkeit, als die Wurzeln einer Gleichung, und es ist denkbar, dass aus einem einzigen partikularen Integral eine oder mehrere Gruppen relativ allgemeiner Differenzial-Gleichungen ableitbar sind.

Diess ist streng genommen Aufgabe des Differenzial-Calculs. Gleichwie es seine Aufgabe ist, die Differenzial-Ausdrücke gegebener Functionen herzustellen, was er in ausgezeichneter Weise leistet, so ist es auch seine Aufgabe, die Differenzial-Gleichungen gegebener Functionen herzustellen. Es ist nicht leicht erklärlich, warum diese so natürliche Aufgabe im Differenzial-Calcul unbeachet geblieben ist.

So wie nun die hergestellten Differenzial-Ausdrücke das erste Fundament der Integration der Differenzial-Ausdrücke sind, indem man z. B. aus $d(\log ax)=\frac{dx}{x}$ sogleich hat: $\int\frac{dx}{x}=\log ax$, eben so können die aus Functionen hergestellten Differenzial-Gleichungen das erste Fundament der Integration der Differenzial-Gleichungen sein, und es ist denkbar, dass sich viele Schwierigkeiten der Integration von selbst heben, wenn diess Fundament beachtet wird. Wir ziehen daher diese Aufgabe in den Kreis unserer Untersuchung, obgleich sie, wie erwähnt, Gegenstand des Differenzial-Calculs ist.

§ 46.

Das Verfahren, Differenzial-Gleichungen aus gegebenen Functionen abzuleiten, ist äusserst einfach. Ist $y - fx = 0$ gegeben, so erhält man: $dy - d(fx) = 0$. Der Ausdruck: $d(fx)$ wird in beliebige Summanden zerlegt, z. B. in:

$$- ad(fx) + [d(fx) + ad(fx)];$$

in einen der Summanden z. B. $-ad(fx)$ wird aus der gegebenen Gleichung eine Function von y substituirt, während der andere Summand: $[d(fx) + ad(fx)]$ als Function von x bestehen bleibt, wodurch man aus $dy - d(fx) = 0$ eine Gleichung von drei Gliedern erhält:

$$dy + F(x,y)dx - [d(fx) + ad(fx)] = 0.$$

Nun wird wieder differenzirt, und wieder zerlegt z. B.:

$$d^2(fx) = - bd^2(fx) + [d^2(fx) + bd^2(fx)],$$

wodurch man eine Gleichung des zweiten Grades mit 4 Gliedern erhält. Wird diess Verfahren fortgesetzt, so erfolgt nach $n$maliger Differenzirung eine Differenzial-Gleichung des n^{ten} Grades mit $(n + 2)$ Gliedern.

Es leuchtet sogleich ein, dass man durch diess Verfahren aus einer und derselben Function unendlich viele Differenzial-Gleichungen, sowohl lineare als nicht-lineare herstellen kann, da die Zerlegung und Substitution ganz willkührlich ist, und z. B.

$$dfx = - F(x,y)d(fx) + dfx + F(x,y)d(fx)$$

gesetzt, und nicht bloss etwa Functionen von y, sondern auch von dy, $d^2y\ldots$ substituirt werden können, wodurch man immer andere Gleichungen erhält, die dennoch sämmtlich die gegebene Function $y - fx = 0$ als partikulares Integral gemeinsam haben. Ein solches Integral kann viele und verschiedene Differenzial-Gleichungen mit seinen Polypen-Armen umfassen.

Beispiel. Sei gegeben: $y - e^{\lambda x} = 0$, so wird:

$$dy - \lambda e^{\lambda x} dx = 0; \quad dy + ae^{\lambda x}dx - (\lambda + a)e^{\lambda x} dx = 0;$$

$$dy + aydx - (\lambda + a)e^{\lambda x} dx = 0,$$

eine der unendlich vielen möglichen Differenzial-Gleichungen ersten Grades, je nachdem $\lambda e^{\lambda x} dx$ in Summanden zerlegt wird. Fahren wir nun, um eine ganz einfache Differenzial-Gleichung zu erhalten, in der begonnenen Zerlegungsart fort, so wird:

$$d^2y + adydx - \lambda(\lambda + a)e^{\lambda x}dx^2 = 0;$$
$$d^2y + adydx + be^{\lambda x}dx^2 - [\lambda(\lambda + a) + b]e^{\lambda x}dx^2 = 0;$$
$$d^2y + adydx + bydx^2 - [\lambda(\lambda + a) + b]e^{\lambda x}dx^2 = 0.$$

Es ist einleuchtend, dass wir aus diesem Verfahren nach n maliger Differenzirung die bekannte lineare Differenzial-Gleichung mit constanten Coefficienten erhalten. Wird nun das letzte Glied gleich Null gesetzt, so erfolgt z. B. bei der Differenzial-Gleichung des zweiten Grades:

$$d^2y + adydx + bydx^2 = 0, \text{ und } y = e^{\lambda x}$$

ist unmittelbar ihr partikulares Integral. Die eine Seite der Gleichung liefert die Aufgabe, die andere die Auflösung, und durch die willkührlich eingeführten Coefficienten a, b, wird ein zweites partikulares Integral mitbestimmt. Sei $e^{\lambda_{,}x}$ z. B. e^{2x} das partikulare Integral, von dem nun ausgegangen wird, so giebt das letzte Glied:

$$[\lambda_{,}(\lambda_{,} + a) + b]e^{\lambda_{,}x}dx^2 = 0; \quad \lambda_{,}^2 + a\lambda_{,} + b = 0$$

den zweiten Werth $\lambda_{,,}$, so dass $y = e^{\lambda_{,,}x}$ der zweite partikulare Integral ist. Will man von der vorher gewählten Function $y = e^{2x}$ ausgehen, dann sind die beiden Constanten nicht mehr willkührlich, sondern eine von ihnen muss so gewählt werden, dass $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ die Wurzel $\lambda = 2$ hat, was auf unzählig viele verschiedene Arten geschehen kann, so dass das zweite partikulare Integral von a oder b abhängig wird.

Es fällt in die Augen, dass die Auflösung dieselbe ist, wie im 4. Abschnitt, nur ist sie kürzer, man hat sie unmittelbar; denn gleichwie man unmittelbar aus $d(\sin nx) = n \cos nxdx$ umgekehrt: $\int n \cos nxdx = \sin nx$ erhält, so hat man aus der Differenzial-Gleichung sogleich $y = e^{\lambda x}$, weil sie aus dieser Function gebildet worden ist.

§ 47.

Man kann diese Ableitungen kürzer und bequemer einrichten. Man suche die Differenzialien der gegebenen Function fx vom ersten bis n^{ten} Differenzial, multiplicire die einzelnen Differenzialien mit willkührlichen Coefficienten, doch so, dass $fxdx^n$ gemeinschaftlicher Factor aller oder mehrerer Glieder wird, addire einerseits alle angedeuteten, andererseits alle ausgeführten Differenzialien, dann erhält man eine Differenzial-Gleichung, deren eine Seite das Problem und deren andere die Auflösung giebt.

Beispiele. 1) $y = e^{\lambda x}$, $dy = \lambda e^{\lambda x} dx$, $d^2 y = \lambda^2 e^{\lambda x} dx^2 \ldots$, $d^n y = \lambda^n e^{\lambda x} dx^n$, dann wird

$$d^n y + A d^{n-1} y dx + B d^{n-2} y dx^2 + \ldots + L dy dx^{n-1} + M y dx^n = (\lambda^n + A\lambda^{n-1} + B\lambda^{n-2} + \ldots L\lambda + M) e^{\lambda x} dx^n.$$

Setzt man die Gleichung gleich Null, so ist $y = e^{\lambda x}$ das Integral, und die n Werthe von λ werden durch die Gleichung

$$\lambda^n + A\lambda^{n-1} + B\lambda^{n-2} + \ldots L\lambda + M,$$

bestimmt, die gleich Null gesetzt werden muss, wenn

$$d^n y + A d^{n-1} y dx + B d^{n-2} y dx^2 + \ldots L dy dx^{n-1} + M dx^n = 0$$

gegeben ist.

Dasselbe Verfahren findet bei allen Functionen statt, die eine Periodicität in ihren Differenzialien haben.

2) $y = \sin \mu x$, $d^2 y = -\mu^2 \sin \mu x dx^2$, $d^4 y = \mu^4 \sin \mu x dx^4$, $d^{2n} y = \pm \mu^{2n} \sin \mu x dx^{2n}$

Daraus wird einerseits die Gleichung gebildet:

$$d^{2n} y + A d^{2n-2} y dx^2 + \ldots L d^2 y dx^{2n-2} + M y dx^{2n},$$

und andrerseits

$$(\mu^{2n} - A\mu^{2n-2} + \ldots \pm L\mu^2 \mp M) \sin(\mu x) dx^{2n}.$$

Beide Gleichungen gleich Null gesetzt, giebt die erste das Problem, und die zweite die Auflösung; das Integral der gegebenen Gleichung ist $y = \sin \mu x$ und μ wird aus

$$\mu^{2n} - A\mu^{2n-2} + \ldots \pm L\mu^2 \mp M = 0$$

bestimmt. Dasselbe Resultat findet man für $y = \cos \mu x$.

3) Auch die elliptischen Functionen haben Periodicität in ihren Differenzialien,. und aus ihnen können gleichfalls Differenzial-Gleichungen dieser Art gebildet werden.

So giebt z. B. $y = \sin (am.\ \mu x)$, (wo das Zeichen *am.* als Amplitudo gelesen wird,) entsprechend der Kreisfunction:

$$y = \sin \mu x \text{ d. h. } y = \sin (arc.\ \mu x).$$

$$d^2y = -\mu^2(1 + \varkappa^2) \sin am.\ \mu x dx^2 + 2\mu^2\varkappa^2 \sin^3 am.\ \mu x dx^2.$$

Bleibt man bei einer Differenzial-Gleichung des zweiten Grades und verbindet einerseits $d^2y + (b^2y - c^2y^3)dx^2$, dann wird andrerseits

$$[b^2 - \mu^2(1 + \varkappa^2)] \sin am.\ \mu x dx^2 - (c^2 - 2\mu^2\varkappa^2) \sin^3 am.\ \mu x dx^2.$$

Setzt man $b^2 = \mu^2(1 + \varkappa^2)$, und $c^2 = 2\mu^2\varkappa^2$, so hat die Differenzial-Gleichung: $d^2y + b^2ydx^2 - c^2y^3dx^2 = 0$ das partikulare Integral $y = \sin am.\ \mu x$, und μ wird aus $\mu^2 = \frac{2b^2 - c^2}{2}$ bestimmt.

Für $\varkappa = 0$ geht die Ellipse in den Kreis über; die Gleichung $d^2y + b^2ydx^2 = 0$ wird linear, und $y = \sin \mu x$, (wo $\mu = b$) ist ihr partikulares Integral. Für $\varkappa = i$ verschwindet die Periodicität des reellen Theils der elliptischen Function, die Gleichung wird: $d^2y - c^2y^3dx^2 = 0$, und $y = \sin am.\ \mu x$ ist ihr partikulares Integral, wo μ aus Gleichung $\mu^2 = \frac{2b^2 - c^2}{2}$ bestimmt wird. Es wird $\mu = \frac{ci}{\sqrt{2}}$, imaginär, wie es auch die imaginäre Periodicität der elliptischen Functionen bedingt. (Die Periodicität wird hier in Beziehung auf Differenzialien genommen.)

4) Untersuchen wir $y = x^\mu$, so ist diese Function in ihren Differenzialien zwar nicht periodisch, wird es aber durch successive Multiplication mit x.

Es wird $x^n d^n y = \mu . \mu - 1 \ldots \mu - (n-1) x^\mu dx^n$,

$$Ax^{n-1} d^{n-1} y dx = A\mu . \mu - 1 \ldots \mu - (n-2) x^\mu dx^n,$$

$$Bx^{n-2} d^{n-2} y dx^2 = B\mu . \mu - 1 \ldots \mu - (n-3) x^\mu dx^n,$$

. . . .

$$Lxdydx^{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots L\mu x^\mu dx^n$$

$$Mydx^n = \ldots\ldots\ldots\ldots Mx^\mu dx^n$$

Die Glieder links und rechts des Gleichheits-Zeichens addirt und ihre Summe gleich Null gesetzt, giebt die Differenzial-Gleichung:

$$x^n d^n y + Ax^{n-1} d^{n-1} y dx + Bx^{n-2} d^{n-2} y dx^2 + \ldots Lxdydx^{n-1} + \\ + Mydx^n = 0,$$

als Problem; die andere Seite giebt den gemeinsamen Factor x^μ als partikulares Integral, und die Gleichung:

$$\mu . \mu - 1 \ldots \mu - (n-1) + A\mu \ldots \mu - (n-2) + B\mu \ldots \mu - (n-3) \ldots + \\ + L\mu + M = 0,$$

giebt die n Werthe von μ.

Zusatz. Diese wenigen Beispiele zeigen schon, welchen Werth die Radicale vom Range der Urfunctionen: x^μ, $\log x$, e^x, $\sin x$ &c. für die Herstellung der Differenzial-Gleichungen haben, und welchen Reichthum an Resultaten die Analysis erlangen muss, wenn viele solcher Radicale durch specielle Untersuchungen zu Tag gefördert und den voranstehenden angereiht werden.

§ 48.

Nimmt man zusammengesetzte Functionen, so geben sie gleichfalls viele ihnen entsprechende Differenzial-Gleichungen zugleich mit ihren Auflösungen.

Es sei gegeben: $y = x^\nu e^{\lambda x}$.

Man bildet die Differenzialien:

$$dy = \nu x^{\nu-1} e^{\lambda x} dx + \lambda x^\nu e^{\lambda x} dx;$$

$$d^2y = (\nu . \nu - 1\, x^{\nu-2} + 2\nu\lambda x^{\nu-1} + \lambda^2 x^\nu) e^{\lambda x} dx^2;$$

$$d^3y = (\nu . \nu - 1 . \nu - 2 x^{\nu-3} + 3\nu . \nu - 1 \lambda x^{\nu-2} + 3\nu\lambda^2 x^{\nu-1} + \lambda^3 x^\nu) e^{\lambda x} dx^3;$$

. . . .

Bleibt man nun bei einer Differenzial-Gleichung, z.B. des dritten Grades, und will man die ersten, die zweiten und die folgenden, also die senkrecht unter einander stehenden Glieder der Differenzialien gleichartig haben und summiren, so muss man, wenn d^3y unverändert bleibt, ad^2y durch x, bdy durch x^2 &c. dividiren.

Dann wird: $d^3y + \frac{ad^2ydx}{x} + \frac{bdydx^2}{x^2} + c^3ydx^3 =$

$$\begin{aligned} &(\nu . \nu - 1 . \nu - 2 + a\nu . \nu - 1 + b\nu) x^{\nu-3} e^{\lambda x} dx^3 \\ &+ (3\nu . \nu - 1 + 2a\nu + b) \lambda x^{\nu-2} e^{\lambda x} dx^3 \\ &+ (3\nu + a) \lambda^2 x^{\nu-1} e^{\lambda x} dx^3 \\ &+ (\lambda^3 + c^3)\, x^\nu e^{\lambda x} dx^3. \end{aligned}$$

Wird die Gleichung $d^3y + \frac{ad^2ydx}{x} + \frac{bdydx^2}{x^2} + c^3y^3dx^3$ gleich Null genommen, so müssen die Glieder rechts des Gleichheits-Zeichens einzeln gleich Null werden. Daraus folgt:

$$\lambda^3 + c^3 = 0, \quad \lambda = -c; \quad a = -3\nu, \quad b = +3\nu . \nu + 1$$

und aus $\quad \nu . \nu - 1 . \nu - 2 + a\nu . \nu - 1 + b\nu = 0 \quad$ folgt endlich

$$\nu . \nu + 1 . \nu + 2 = 0.$$

Es sind daher drei Gleichungen möglich, für: $\nu = 0$, $\nu = -1$, $\nu = -2$.

1) Für $\nu = 0$, wird $a = 0$, $b = 0$, und die Gleichung $d^3y + c^3ydx^3 = 0$ hat $y = e^{\lambda x} = e^{-cx}$ zum partikularen Integral, wie ohnehin bekannt ist.

2) Für $\nu = -1$, wird $a = +3$, $b = 0$ und Gleichung $d^3y + \frac{3d^2ydx}{x} + c^3ydx^3 = 0$ hat $y = \frac{e^{-cx}}{x}$ zum partikularen Integral.

3) Für $\nu = -2$, wird $a = 6$, $b = 6$, und Gleichung $d^3y + \frac{6d^2ydx}{x} + \frac{6dydx^2}{x^2} + c^3ydx^3 = 0$ hat $y = \frac{e^{-cx}}{x^2}$ zum partikularen Integral.

Wird hingegen $\lambda = 0$, also $y = x^\nu$ genommen, dann bleibt nur noch die erste Gleichung: $\nu.\nu{-}1.\nu{-}2 + a\nu.\nu{-}1 + b\nu = 0$, und giebt das partikulare Integral $y = x^\nu$ von

$$d^3y + \frac{ad^2ydx}{x} + \frac{bdydx^2}{x^2} = 0,$$

wie bekannt ist.

Zusatz 1. Zur Bestimmung der 2 unbekannten Grössen ν und λ sind 4 Gleichungen gegeben; es müssen daher die Coefficienten a und b in Mitleidenschaft gezogen werden, denn durch 4 Gleichungen werden 4 Grössen bestimmt; die Coefficienten werden selbst bestimmte Zahlen und sind nicht mehr allgemein und willkührlich.

Zusatz 2. Will man bloss eine Differenzial-Gleichung des zweiten Grades: $d^2y + \frac{adydx}{x} + b^2ydx^2 = 0$, dann erhält man die drei Gleichungen: $\lambda^2 + b^2 = 0$, $2\nu + a = 0$, $\nu.\nu+1 = 0$; daraus wird $\lambda = b\sqrt{-1}$, $(= bi)$; $a = -2\nu$; $\nu = 0$, $\nu = -1$. Es entstehen zwei Gleichungen:

1) Für $\nu = 0$, $a = 0$; $d^2y + b^2ydx^2 = 0$ mit dem partikularen Integral $y = e^{bxi}$.

2) Für $\nu = -1$, $a = +2$; $d^2y + \frac{2dydx}{x} + b^2ydx^2 = 0$ mit dem partikularen Integral: $y = \frac{e^{bxi}}{x}$.

§ 49.

Man kann jedoch die einzelnen Glieder auch anders verbinden. Wählen wir z. B. die obige Gleichung des dritten

Grades für $y = x^\nu e^{\lambda x}$, jedoch mit dem Coefficienten-Bau:

$$d^3y + ad^2ydx + bdydx^2 + cydx^3 = 0,$$

dann müssen in: $y = x^\nu e^{\lambda x}$, $dy = (\nu x^{\nu-1} + \lambda x^\nu) e^{\lambda x} dx$;

$d^2y = (\nu . \nu - 1\, x^{\nu-2} + 2\nu\lambda x^{\nu-1} + \lambda^2 x^\nu)\, e^{\lambda x} dx^2$;

$d^3y = (\nu . \nu - 1 . \nu - 2 x^{\nu-3} + 3\lambda\nu . \nu - 1 x^{\nu-2} + 3\nu\lambda^2 x^{\nu-1} + \lambda^3 x^\nu) e^{\lambda x} dx^3$,

die gleichnamigen Glieder verbunden werden, also die letzten, die vorletzten Glieder u. s. w. eines jeden Differenzials. Es bleibt dann vom höchsten Differenzial (hier vom dritten) das erste Glied übrig, $(\nu . \nu - 1 . \nu - 2)$. Dieses muss, gleich den übrigen Summen gleich Null gesetzt werden, wenn die Gleichung gleich Null ist.

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c &= 0 \\ \nu(3\lambda^2 + 2a\lambda + b) &= 0 \\ \nu . \nu - 1\, (3\lambda + a) &= 0 \\ \nu . \nu - 1 . \nu - 2 &= 0. \end{aligned}$$

1) Für $\nu = 0$ bleibt nur die erste Gleichung, und diese giebt die drei Werthe von λ des Integrals $y = x^0 e^{\lambda x}$, $y = e^{\lambda x}$, wie bekannt.

2) Für $\nu = 1$ bleiben die erste und zweite Gleichung, und $y = xe^{\lambda x}$ ist auch ein partikulares Integral. Jedoch muss λ den beiden Gleichungen:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \text{ und } 3\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

genügen.

Da die zweite Gleichung das Differenzial des ersten ist, so folgt, dass zwei Wurzeln λ gleich sein müssen, wenn $y = xe^{\lambda x}$ ein partikulares Integral der gegebenen Gleichung sein soll.

3) Für $\nu = 2$ bleiben die drei Gleichungen, und $y = x^2 e^{\lambda x}$ ist partikulares Integral. In diesen Fall hat jedoch

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

drei gleiche Wurzeln, da die zweite Gleichung das Differenzial der ersten, und die dritte das Differenzial der zweiten ist.

Man erhält sogleich das vollständige Integral:

$$y = e^{\lambda x}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2).$$

Zusatz. Es ist einleuchtend, dass in diesen und andern möglichen Combinationen der Summirung gleichartiger Glieder die Differenzial-Gleichungen in reicher Fülle auftauchen. Ihre Systematisirung ist Aufgabe des Differenzial-Calculs. Wir beschränken uns, um die Begriffe zu fixiren, und das Verfahren anschaulich zu machen, auf wenige Beispiele linearer Differenzial-Gleichungen vom einfachsten Coefficienten-Bau.

§ 50.

Ist $y = x^\nu (\log x)^\mu$ gegeben, so wird

$$dy = [\nu(\log x)^\mu + \mu(\log x)^{\mu-1}]x^{\nu-1}dx;$$

$$d^2y = [\nu . \nu - 1 (\log x)^\mu + \mu(2\nu - 1)(\log x)^{\mu-1} +$$
$$+ (\mu . \mu - 1)(\log x)^{\mu-2}]x^{\nu-2}dx^2;$$

$$d^3y = [\nu . \nu - 1 . \nu - 2 (\log x)^\mu + \mu(3\nu^2 - 6\nu + 2)(\log x)^{\mu-1} +$$
$$+ 3\mu . \mu - 1 . \nu - 1 (\log x)^{\mu-2} + \mu . \mu - 1 . \mu - 2 (\log x)^{\mu-3}]x^{\nu-3}dx^3;$$

. . . .

I. Bildet man die Differenzial-Gleichung:

$$d^3y + \frac{ad^2ydx}{x} + \frac{b^2dydx^2}{x^2} + \frac{cydx^3}{x^3} = 0$$

dann werden die unter einander stehenden Glieder rechts des Gleichheitszeichens gleichartig, und geben folgende 4 Gleichungen:

(α) $\nu . \nu - 1 . \nu - 2 + a\nu . \nu - 1 + b\nu + c = 0;$

(β) $3\nu^2 - 6\nu + 2 + a(2\nu - 1) + b = 0;$

(γ) $3(\nu - 1) + a = 0;$

(δ) $\mu . \mu - 1 . \mu - 2 = 0.$

Diese Gleichungen haben die Eigenschaft, dass (β) das Differenzial von (α), und (γ) das Differenzial von (β) ist, so

dass, wenn sämmtliche drei Gleichungen stattfinden, die Gleichung (α) drei gleiche Wurzeln haben muss, und diess findet jederzeit statt, wenn die ersten, zweiten, dritten ... Glieder als gleichartig zusammengenommen werden.

Aus (δ) folgen drei Werthe von μ; $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$.

1) Der Werth $\mu=0$ giebt:

$$d^3y + \frac{ad^2ydx}{x} + \frac{bdydx^2}{x^2} + \frac{cydx^3}{x^3} = 0.$$

Das partikulare Integral ist $y = x^\nu$, und ν wird in seinen drei Werthen durch $\nu \,.\, \nu - 1 \,.\, \nu - 2 + a\nu \,.\, \nu - 1 + b\nu + c = 0$ bestimmt.

2) Der Werth $\mu=1$ giebt die zwei Gleichungen (α) und (β) und $y = x^\nu (\log x)^1$ ist gleichfalls Integral von

$$d^3y + \frac{ad^2ydx}{x} + \frac{bdydx^2}{x^2} + \frac{cydx^3}{x^3} = 0.$$

Da jedoch Gleichung (β) das Differenzial von (α) ist, so hat Gleichung (α) zwei gleiche Wurzeln. In diesem Falle ist daher: $y = x^\nu \log x$ ein partikulares Integral der Gleichung.

3) Der Werth $\mu=2$, giebt die drei Gleichungen (α), (β), (γ). Da auch (γ) das Differenzial von (β) ist, so hat die Gleichung (α) drei gleiche Wurzeln, und in diesen Fall ist $x^\nu(\log x)^2$ ebenfalls partikulares Integral, wie ohnehin bekannt ist.

Man kann daher sogleich das vollständige Integral bilden:

$$y = x^\nu[\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \log x + \mathfrak{C} (\log x)^2].$$

II. Bildet man die Differenzial-Gleichung:

$$d^3y + \frac{ad^2ydx}{x \log x} + \frac{bdydx^2}{(x \log x)^2} + \frac{cydx^3}{(x \log x)^3} = 0$$

indem man die letzten, vorletzten ... Glieder als gleichartig summirt, so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(1)\ 0 = \mu \,.\, \mu - 1 \,.\, \mu - 2 && + a\mu \,.\, \mu - 1 && + b\mu + c;\\
&(2)\ 0 = 3\mu \,.\, \mu - 1 \,.\, \nu - 1 && + a\mu(2\nu - 1) && + b\nu;\\
&(3)\ 0 = \mu(3\nu^2 - 6\nu + 2 && + a\nu \,.\, \nu - 1;\\
&(4)\ 0 = \nu \,.\, \nu - 1 \,.\, \nu - 2.
\end{aligned}$$

Die drei Werthe $\nu = 0$, $\nu = 1$, $\nu = 2$ machen die letzte Gleichung zu Null, aber $\nu = 0$, $\nu = 1$ machen auch in Gleichung 3 den Werth μ gleich Null, so dass kein Integral folgt. Es bleibt noch der Werth $\nu = 2$ übrig. Da nur noch drei Gleichungen (1), (2), (3), und vier unbekannte Grössen, a, b, c, μ gegeben sind, so bleibt nur eine der Constanten z. B. a willkührlich.

Es folgen dann die Werthe: $\mu = -a$; $b = -\frac{3a}{2}$, $c = +\frac{a(a+4)}{2}$.

Ist daher die Gleichung gegeben:

$$d^3y + \frac{ad^2ydx}{x \log x} - \frac{3adydx}{2(x \log x)^2} + \frac{a(a+4)ydx^3}{2(x \log x)^3} = 0$$

so ist $y = x^\nu (\log x)^\mu$ $y = x^2 (\log x)^{-a}$ ihr partikulares Integral. So hat z. B.

$$d^3y + \frac{2d^2ydx}{x \log x} - \frac{3dydx^2}{(x \log x)^2} + \frac{6ydx^3}{(x \log x)^3} = 0$$

das partikulare Integral: $y = \frac{x^2}{(\log x)^2}$.

U. s. w.

§ 51.

Differenzirt werde folgende Function:

$$y = x^\nu \sin \lambda x,$$

$$dy = \nu x^{\nu-1} \sin \lambda x dx + \lambda x^\nu \cos \lambda x dx,$$

$$d^2y = \nu . \nu - 1 x^{\nu-2} \sin \lambda x dx^2 + 2\nu\lambda x^{\nu-1} \cos \lambda x dx^2 - \lambda^2 x^\nu \sin \lambda x dx^2.$$

Bildet man die Gleichung: $d^2y + \frac{adydx}{x} + c^2ydx^2 = 0$

so werden die ersten und zweiten Glieder in dy und d^2y gleichartig, und es entstehen die Bedingungs-Gleichungen:

$\nu . \nu - 1 + a\nu = 0$; $2\nu + a = 0$ und $\lambda^2 = c^2$, $\lambda = \pm c$

Daraus folgt der Werth $a=2$, $\nu=-1$, und: $y=\frac{\sin(\pm cx)}{x}$ ist das Integral von

$$d^2y+\frac{2dydx}{x}+c^2ydx^2=0.$$

Geht man weiter z. B. zu einer Gleichung des 4ten Grades, indem d^3y, d^4y sehr leicht zu bilden sind, so erhält man für:

$$d^4y+\frac{ad^3ydx}{x}+\frac{bd^2ydx^2}{x^2}+\frac{cdydx^3}{x^3}-\varkappa^4ydx^4=0$$

folgeode 5 Gleichungen:

(1) $\lambda^4=\varkappa^4$; (2) $-4\nu-a=0$; $a=-4\nu$;

(3) $6\nu.\nu-1+3a\nu+b=0$; $b=+6\nu.\nu+1$;

(4) $4\nu.\nu-1.\nu-2+3a\nu.\nu-1+2b\nu+c=0$; $c=-4\nu.\nu+1.\nu+2$;

(5) $\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3+a\nu.\nu-1.\nu-2+b\nu.\nu-1+c\nu=0$;

$$\nu.\nu+1.\nu+2.\nu+3=0.$$

Es genügen daher die 4 Werthe $\nu=0, \nu=-1, \nu=-2, \nu=-3$.

1) Der Werth $\nu=0$, macht die Coefficienten a, b, c zu Null; es bleibt die Gleichung:

$$d^4y-\varkappa^4ydx^4;\ \text{Integral: } y=\sin\varkappa x.$$

2) $\nu=-1$ giebt: $a=4$, $b=0$, $c=0$; es bleibt

$$d^4y+\frac{4d^3ydx}{x}-\varkappa^4ydx^4=0;\ \text{Integral: } y=\frac{\sin\varkappa x}{x}.$$

3) $\nu=-2$ giebt: $a=8$, $b=12$, $c=0$; es bleibt:

$$d^4y+\frac{8d^3ydx}{x}+\frac{12d^2ydx^2}{x^2}-\varkappa^4ydx^4=0;$$

$$\text{Integral: } y=\frac{\sin\varkappa x}{x^2}.$$

4) $\nu=-3$ giebt: $a=12$, $b=36$, $c=24$; es bleibt:

$$d^4y+\frac{12d^3ydx}{x}+\frac{36d^2ydx^2}{x^2}+\frac{24dydx^3}{x^3}-\varkappa^4ydx^4=0$$

$$\text{Integral: } y=\frac{\sin\varkappa x}{x^3}.$$

Man kann jedoch die einzelnen Glieder noch anders summiren, und andere Gleichungen bilden, was hier übergangen wird.

§ 52.

Ist $y = x^{\nu} e^{\lambda x^{\mu}}$ gegeben, so wird

$$dy = \nu x^{\nu - 1} e^{\lambda x^{\mu}} dx + \lambda \mu x^{\nu + \mu - 1} e^{\lambda x^{\mu}} dx,$$

$$d^2 y = \nu . \nu - 1 x^{\nu - 2} e^{\lambda x^{\mu}} dx^2 + (2\nu\lambda\mu + \lambda\mu . \mu - 1) x^{\nu + \mu - 2} e^{\lambda x^{\mu}} dx^2 +$$

$$+ \lambda^2 \mu^2 x^{\nu + 2\mu - 2} e^{\lambda x^{\mu}} dx^2.$$

1) Bleiben wir bei dem zweiten Differenzial und bilden die Gleichung:

$$d^2 y + \frac{a dy dx}{x} + \frac{b y dx^2}{x^2} = 0,$$

so werden die ersten Glieder der Differenzialien gleichartig, und es ist $\nu . \nu - 1 + a\nu + b = 0$ woraus die zwei Werthe ν bestimmt werden. Da die übrigen Glieder ungleichartig sind, und die Exponenten $\nu + \mu - 2$, $\nu + 2\mu - 2$ nur für $\mu = 0$ gleich werden können, so fallen für $\mu = 0$ alle übrigen Glieder weg, und $y = x^{\nu} e^{\lambda}$ oder einfach $y = x^{\nu}$ ist das partikulare Integral von $d^2 y + \frac{a dy dx}{x} + \frac{b y dx^2}{x^2} = 0.$

2) Will man die Gleichung bilden:

$$d^2 y + \frac{a dy dx}{x} - b^2 y x^{2\mu - 2} dx^2 = 0$$

so werden je zwei der sechs Glieder gleichartig, und es erfolgen die drei Bedingungs-Gleichungen

$$\lambda^2 \mu^2 = b^2; \quad a + \nu - 1 = 0; \quad a + 2\nu + \mu - 1 = 0$$

daraus wird abgeleitet: $\nu = 1 - a$; $\mu = a - 1$; $\lambda = \pm \frac{b}{a - 1}$.

Demnach ist die Function $y = x^{\nu} e^{\lambda x^{\mu}} = x^{1-a} e^{\frac{b x^{\mu}}{a-1}}$ das partikulare Integral der Gleichung:

$$d^2y + \frac{a dy dx}{x} - b^2 x^{2\mu - 2} y dx^2 = 0.$$

Für $a = 2$ wird $\nu = -1$, $\mu = +1$, $\lambda = \pm b$ und $y = \frac{e^{bx}}{x}$ ist das partikulare Integral der Gleichung

$$d^2y + \frac{2 dy dx}{x} - b^2 y dx^2 = 0$$

eine bekannte Gleichung, deren Integral man gewöhnlich aus den Reihen ableitet.

Für $a = 3$ wird $\nu = -2$, $\mu = +2$, $\lambda = \pm \frac{b}{2}$ und $y = \frac{e^{\frac{bx^2}{2}}}{x^2}$ ist partikulares Integral der Gleichung:

$$d^2y + \frac{3 dy dx}{x} - b^2 x^2 y dx^2 = 0.$$

U. s. w.

Die Gleichung $d^2y + \frac{a dy dx}{x} - b^2 x^{2\mu - 2} y dx^2 = 0$ ist demnach bedeutend allgemeiner, als die aus den Reihen gefundene Gleichung: $d^2y + \frac{2 dy dx}{x} - b^2 y dx^2 = 0$.

Will man eine Gleichung von bloss zwei Gliedern:

$$d^2y - b^2 y x^{2\mu - 2} dx^2 = 0,$$

dann ist $b^2 = \lambda^2$ und überdiess müssen, damit die übrigen vier Glieder ausfallen, die Bedingungs-Gleichungen stattfinden $a = 0$; $\nu . \nu - 1 = 0$; $2\nu + \mu - 1 = 0$ daraus folgen

1. die Werthe: $\nu = 0$, $\mu = 1$ und geben die Gleichung: $d^2y - b^2 y dx^2 = 0$, deren Integral $y = e^{bx}$ ist;

2. die Werthe $\nu = 1$, $\mu = -1$ geben die Gleichung: $d^2y - \frac{b^2ydx^2}{x^4} = 0$, deren Integral $y = xe^{\frac{b}{x}}$ ist, ein bekannter Ausnahmsfall der Riccati'schen Gleichung.

Aehnliches folgt aus den Differenzialen des dritten, vierten und der höheren Grade.

Zusatz. Würde man einfach die Function $y = e^{\lambda x^\mu}$ nehmen und differenziren, so könnte man Gleichungen construiren, wie z. B. folgende:

$$d^2y + 2ax^{\mu-1}dydx + (b^2x^\mu - c^2)x^{\mu-2}ydx^2 = 0$$

mit den Bedingungs-Gleichungen:

$$c^2 = \lambda\mu \,.\, \mu - 1\,; \quad \lambda^2\mu^2 + 2a\lambda\mu + b^2 = 0\,,$$

wie eine leichte Rechnung giebt. Die Function $y = e^{\lambda x^\mu}$ ist Integral der construirten Gleichung, und λ, μ werden aus den Bedingungs-Gleichungen bestimmt, so dass a, b, c allgemeine Constanten bleiben. U. s. w.

§ 53.

Sei irgend eine Combination einer Function mit dem Integral-Logarithmus gegeben.

Die Definition und Bezeichnung des Integral-Logarithmus ist:

$$dli(\nu x) = \frac{\nu dx}{log\, \nu x}.$$

Gegeben sei $y = e^{\lambda x} li(\nu x)$;

$$dy = \left(\lambda li(\nu x + \frac{\nu}{log\, \nu x}\right)e^{\lambda x}dx\,;$$

$$d^2y = \left(\lambda^2 li(\nu x) + \frac{2\lambda\nu}{log\, \nu x} - \frac{\nu}{x(log\, \nu x)^2}\right)e^{\lambda x}dx^2\,;$$

. . . .

Daraus folgt:

Erste Gleichung:

$$d^2y + adydx + bydx^2 + \frac{\nu e^{\lambda x}dx^2}{x(log\, \nu x)^3} = 0$$

mit den zwei Bedingungs-Gleichungen:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{und} \quad 2\lambda + a = 0,$$

deren zweite das Differenzial der ersten ist, so dass λ zwei gleiche Werthe: $-\frac{a}{2}$ hat, woraus $b = \frac{a^2}{4}$ folgt. Es ist daher $e^{\frac{-ax}{2}} li(\nu x)$ das partikulare Integral der Differenzial-Gleichung:

$$d^2y + adydx + \frac{a^2}{4}ydx^2 + \frac{\nu e^{\lambda x}dx^2}{x(\log \nu x)^2} = 0.$$

Zweite Gleichung: $d^2y + adydx + \frac{\nu e^{\lambda x}dx^2}{x(\log \nu x)^2} = 0$ mit den Bedingungs-Gleichungen: $\lambda^2 + a\lambda = 0$; $2\lambda + a = 0$, woraus $\lambda = 0$ und $a = 0$ folgt. Demnach ist $y = li(\nu x)$ das partikulare Integral von $d^2y + \frac{\nu dx^2}{x(\log \nu x)^2}$, wie ohnehin bekannt ist.

Dritte Gleichung: Macht man die letzten Glieder des ersten und zweiten Differenzials gleichnamig, indem man ady durch $x \log \nu x$ dividirt, dann erhält man $a - 1 = 0$, $a = 1$.

Die Differenzial-Gleichung wird:

$$d^2y + \frac{dydx}{x \log \nu x} - \left(\lambda^2 + \frac{\lambda}{x \log \nu x}\right) ydx^2 - \frac{2\lambda \nu e^{\lambda x}dx^2}{\log \nu x} = 0.$$

Ganz ähnliche Resultate erhält man aus Integral-Sinus und Integral-Cosinus, deren Definitionen und Bezeichnungen sind: $dSi(nx) = \frac{\sin nx}{x} dx$; $dCi(na) = \frac{\cos nx}{x} dx$. Wir verfolgen sie nicht weiter, da hier für derlei Untersuchungen nur der Weg geöffnet werden soll, übergehen auch die Ableitungen aus den Gamma-Functionen und ähnlichen, und schliessen mit der Construction der von den elliptischen Functionen abhängigen Differenzial-Gleichungen.

§ 54.

Gegeben sei: $y = x^\nu \sin am(\lambda x)$, dann folgt: wenn der Kürze halber $\varDelta = \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, \lambda x)}$ gesetzt wird:

$$dy = \nu x^{\nu-1} \sin am (\lambda x) dx + \lambda x^{\nu} \cos am (\lambda x) . \varDelta\, dx;$$
$$d^2y = \nu . \nu - 1 x^{\nu-2} \sin am (\lambda x) dx^2 + 2\nu\lambda \cos am (\lambda x) \varDelta dx^2 +$$
$$+ \lambda^2 x^{\nu} [-(1 + \varkappa^2) \sin am (\lambda x) + 2\varkappa^2 \sin^3 am (\lambda x)] dx^2.$$
. . . .

Bildet man nun z. B. die Gleichung:

$$d^2y + \frac{adydx}{x} + \frac{bydx^2}{x^2},$$

so werden die ersten, zweiten ... Glieder gleichartig, und es entstehen die Bedingungs-Gleichungen:

$$\nu . \nu - 1 + a\nu + b = 0, \quad a + 2\nu = 0,$$

und die Differenzial-Gleichung:

$$d^2y + \frac{adydx}{x} + \frac{bydx^2}{x^2} + A^2ydx^2 - \frac{2B^2y^3}{x^{2\nu}}dx^2 = 0$$

[da $\sin^3 (am\, \lambda x) = \frac{y^3}{x^{3\nu}}$ und $x^{\nu} \sin^3 am (\lambda x) = \frac{y^3}{x^{2\nu}}$ ist.]

Es wird $A^2 = \lambda^2 (1 + \varkappa^2)$; $B^2 = \varkappa^2\lambda^2$; $a = -2\nu$; $b = \nu . \nu + 1$, woraus beliebig viele Gleichungen gebildet werden können.

Setzt man z. B. $\nu = -1$, dann wird $b = 0$ und $a = 2$, und die Differenzial-Gleichung:

$$d^2y + \frac{2dydx}{x} + A^2ydx^2 - 2B^2a^2y^3dx^2 = 0 \text{ hat } y = \frac{\sin am (\lambda x)}{x}$$

zum partikularen Integral, für welches λ und $\varkappa$ aus den Gleichungen $A^2 = \lambda^2(1 + \varkappa^2)$, $B^2 = \varkappa^2\lambda^2$ hergestellt werden.

Setzt man $\nu = -2$, dann wird $a = 4$, $b = 2$ und $y = \frac{\sin am (\lambda x)}{x^2}$ ist Integral für Gleichung:

$$d^2y + \frac{4dydx}{x} + \frac{2ydx^2}{x^2} + A^2ydx^2 - 2B^2x^4y^3dx^2 = 0.$$

U. s. w.

Die elliptischen Functionen geben daher nur nicht-lineare Differenzial-Gleichungen, wenn nicht etwa $\varkappa = 0$ genommen wird, wodurch sie in Kreisfunctionen übergehen.

§ 55.

Will man überhaupt aus beliebigen Functionen nicht-lineare Differenzial-Gleichungen bilden, so braucht man nur $(dy)^2$, $(dy)^3$, (d^2ydy) &c. zu substituiren, und mit solchen Factoren zu multipliciren, dass gleichnamige Glieder summirt werden, damit die nothwendigen Bedingungs-Gleichungeu hervorgehen. Z. B. sei gegeben:

1) $y = e^{\lambda x}$, $dy = \lambda e^{\lambda x} dx$, $d^2y = \lambda^2 e^{\lambda x} dx^2 \ldots.$

Es wird: $$d^2y + \frac{a(dy)^2}{y} + bdydx + cdx^2 = 0,$$

$$(\lambda^2 + a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} dx^2 = 0.$$

Aus $\lambda^2(1 + a) + b\lambda + c = 0$ wird λ bestimmt, und $y = e^{\lambda x}$ ist Integral der nicht-linearen Differenzial-Gleichung:

$$d^2y + \frac{a(dy)^2}{y} + bdydx + cdx^2 = 0.$$

2) $y = x^\mu$; $dy = \mu x^{\mu - 1}dx$, $d^2y = \mu \,.\, \mu - 1 x^{\mu - 2}dx^2$ &c.

Damit sämmtliche Glieder den Factor x^μ erhalten, muss dy mit x, d^2y mit x^2, $(dy)^2$ mit $x^{2-\mu}$ &c. multiplicirt werden, und wir haben z. B. eine Gleichung des zweiten Grades:

$$x^2d^2y + ax^{2-\mu}(dy)^2 + bxdydx + cydx^2 = 0.$$

Die bestimmende Gleichung wird:

$$\mu \,.\, \mu - 1 + a(\mu - 1)^2 + b\mu + c = 0.$$

Da μ durch den Coefficienten des zweiten Gliedes $x^{2-\mu}$ gegeben ist, so sind die Constanten a, b, c nicht mehr sämmtlich willkührlich, sondern wenigstens eine von ihnen muss so gewählt werden, dass der gegebene Werth μ eine Wurzel der Gleichung: $\mu \,.\, \mu - 1 + a(\mu - 1)^2 + b\mu + c = 0$ wird, was auf verschiedene Art geschehen kann. U. s. w.

Für die Construction sowohl der linearen als der nicht-linearen Differenzial-Gleichungen, können auch noch andere Functionen gewählt werden; je mehr, desto besser; um so reicher wird die Reihe der Muster-Differenzial-Gleichungen werden. Auch wird man sie nicht bloss mit einzelnen Functionen,

sondern mit möglichst vielen Functionen combiniren. Will man z. B. eine Differenzial-Gleichung, in welcher zwei partikulare Integrale $y_, = x^\nu$ und $y_, = x^{\nu + \alpha}$ enthalten sind, so braucht man nur von $y = x^\nu(c + x^\alpha)$ auszugehen, denn dieser Ausdruck enthält die beiden verlangten Integrale.

Dasselbe Verfahren der Construction der Differenzial-Gleichungen wird angewendet, wenn man statt von einzelnen Functionen, sogleich von bestimmten Integralen oder von partikularen Differenzial-Gleichungen selbst ausgeht. Reicher werden vielleicht diese Ableitungen, wenn man von Functionen zweier oder mehrerer unabhängiger Veränderlicher ausgeht, was andern Untersuchungen überlassen bleibt.

Die Systematisirung sämmtlicher Resultate ist die bisher unbeachtet gebliebene Aufgabe des Differenzial- nicht des Integral-Calculs.

§ 56.

Historisch bemerke ich, dass in einem besondern Falle die Construction der Differenzial-Gleichungen aus vorausgesetzten Integralen, also die im Vorhergehenden entwickelte Methode, allerdings in Anwendung gekommen ist, aber nur zu einem besondern Zwecke und mit bestimmten Einschränkungen. Euler war es, der auf diese Probleme kam. Im zweiten Bande seiner Integral-Rechnung, Cap. X und Cap. XI, denen er die Aufschrift gab: „Construction der Differenzial-Gleichungen des zweiten Grades mittelst der Quadratur, und mittelst ihrer Auflösung durch unendliche Reihen“, lehrt er, Differenzial-Gleichungen aus vorausgesetzten Integralen construiren. Durch diesen glücklichen Griff ist er Entdecker und Begründer der „Integration durch bestimmte Integrale“ geworden, und wenn sie auch Euler nicht so nennt, so ist doch seine Behandlung ganz identisch mit der weiter ausgebildeten schönen Methode der Integration durch bestimmte Integrale, die sich überdiess gerade nach den zwei Richtungen ausbildete, die ihr Euler in seinen zwei Untersuchungen vorgezeichnet hat.

Der Vergleichung willen werde ich den Gang der Euler-schen Untersuchungen in allgemeinen Umrissen andeuten.

Ist $dy = Vdx$ gegeben, und ist V eine Function der beiden unabhängigen Veränderlichen x und u, so ist offenbar in $dy = Vdx$ die Function y bloss nach x partiell differenzirt und muss $\partial y = Vdx$, $y = \int_x Vdx$ gesetzt werden. Nun construirt Euler durch partielle Differenzirung nach u aus

$$\partial y_x = Vdx; \quad \frac{\partial \partial y_x}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} dx; \quad \frac{\partial^2 \partial y_x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 Vdx}{\partial u^2}.$$

Durch partielle Integration nach x wird gefunden:

$$y = \int_x Vdx, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \int_x \frac{\partial V}{\partial u} dx; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \int_x \frac{\partial^2 Vdx}{\partial u^2}.$$

Sind nun L, M, N blosse Functionen von u, so können sie beliebig als Factoren vor oder nach dem Integral-Zeichen gesetzt werden, (weil bloss nach x integrirt wird,) und es wird:

$$\frac{L\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny = \int_x dx\left[\frac{L\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{M\partial V}{\partial u} + NV\right].$$

Um die Gleichung rechts des Gleichheitszeichens integriren zu können, wählt man eine Function $y = f(x, u)$, die nach x differenzirt mit $\frac{Ld^2 V}{\partial u^2} + \frac{M\partial V}{\partial u} + NV$ identisch wird, also auch drei Glieder hat, wodurch die Grössen L, M, N, bestimmt werden.

Diese Werthe in die Gleichung: $\frac{L\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{M\partial y}{\partial u} + Ny$ substituirt geben eine totale Differenzial-Gleichung zwischen y und u, da die Veränderliche x nicht mehr in ihr enthalten ist; es entsteht $Ld^2 y + Mdydu + Nydu^2$, und $y = \int_x Vdx$ ist ihr Integral, wenn x nach der Integration constant, $x = a$ gesetzt wird.

Beispiel. Sei $V = e^{ux}x^n(c-x)^\nu$, so wird

$$\frac{\partial V}{\partial u} = e^{ux}x^{n+1}(c-x)^\nu; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = e^{ux}x^{n+2}(c-x)^\nu.$$

Es ist nun, da $V, \frac{\partial V}{\partial u}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}$ den Factor $e^{ux}x^n(c-x)^\nu$ gemeinschaftlich haben, folgende Formel nach x zu integriren:

(I.) $$e^{ux}x^n(c-x)^\nu(Lx^2 + Mx + N)dx.$$

Ihr Integral sei: $e^{ux}x^{n+1}(c-x)^{\nu+1}$.

Diess nach x differenzirt giebt:

(II.) $$e^{ux}x^n(c-x)^\nu[ux(c-x) + (n+1)(c-x) - (\nu+1)x]dx.$$

Da Gleichungen I und II identisch sein müssen, so sind die Glieder, die x^2, x und x^0 enthalten, einzeln gleich, und daraus werden L, M, N gefunden.

Es ist: $N = (n+1)c$; $M = cu - (n+\nu+2)$, $L = -u$. Das Integral von Gleichung II ist: $e^{ux}x^{n+1}(c-x)^{\nu+1}$, und löst zugleich die Gleichung III auf:

(III.) $$\frac{Ld^2y}{du^2} + \frac{Mdy}{du} + Ny.$$

Wird nämlich in Gleichung II nach vollbrachter Integration $x = a$ gesetzt, und werden die Werthe L, M, N in III substituirt, so ist:

$$-\frac{ud^2y}{du^2} + \frac{cudy}{du} - \frac{(n+\nu+2)dy}{du} + (n+1)cy = e^{au}a^{n+1}(c-a)^{\nu-1}.$$

Wird die willkührliche Constante $a = c$ gesetzt, so entsteht die Gleichung:

$$ud^2y - audydu + (n+\nu+2)dydu - (n+1)aydu^2 = 0$$

und $$y = \int_x Vdx = \int_x e^{ux}x^n(a-x)^\nu$$

ist ihr Integral, wenn nach der Integration $x = a$ gesetzt wird. Diess waren die Anfänge der Methode der Integration durch bestimmte Integrale.

Es galt hier nur zu constatiren, dass in einem besondern Falle die Methode angewendet worden ist, aus vorausgesetzten

Functionen V und W, (im obigen Beispiele, aus $e^{ux}x^n(a-x)^\nu$ und $e^{ux}x^{n+1}(a-x)^{\nu+1}$ durch zweimalige Differenzirungen von V nach u und durch einmalige Differenzirung von W nach x, eine Differenzial-Gleichung des zweiten Grades:

$$Ld^2y + Mdydx + Nydx^2 = 0$$

abzuleiten, deren Integral vorausgesetzt ist $y = \int_x e^{ux}x^n(a-x)^\nu dx$, eine Voraussetzung, die Vorzügliches geleistet hat. Es ist daher der Mühe werth, dass das Prinzip, auf dem sie beruht, nicht bloss gelegentlich, sondern a priori in ganzer Vollständigkeit und Allgemeinheit durchgeführt werde.

§ 57.

Und hiemit schliessen wir diese Untersuchungen, die, wie erwähnt, beliebig erweitert werden können. Das Prinzip ist, dass man eine beliebige Function als Integral voraussetzt und durch Differenzirung Gleichungen bildet, deren eine Seite die Differenzial-Gleichungen als Probleme, und deren andere Seite ihre Integrale mit den nothwendigen Bedingungs-Gleichungen liefert. — Entsteht nur eine Bedingungs-Gleichung, dann bleibt die resultirende Differenzial-Gleichung relativ allgemein. Müssen aber mehrere Bedingungs-Gleichungen gebildet werden, dann kann der Fall eintreten, dass einzelne oder alle Coefficienten bloss bestimmte Grössen sind, wie in den gewählten Beispielen erläutert wurde. Werden nicht sämmtliche partikulare Integrale zugleich gefunden, dann tritt die Aufgabe ein, aus den bekannten partikularen Integralen die übrigen zu ermitteln. —

Liefern nun zwar diese Ableitungen, systematisch und vollständig durchgeführt, für die Differenzial-Gleichungen höherer Ordnung mehr Integrale als alle andern Integrations-Methoden zusammengenommen, so geben sie doch mit wenigen Ausnahmen nur Differenzial-Gleichungen mit einzelnen oder mehreren bestimmten Coefficienten, die demnach der nothwendigen Allgemeinheit entbehren. Es bleibt also zu untersuchen, ob nicht umgekehrt aus gegebenen Differenzial-Gleichungen partikulare Integrale abgeleitet werden können.

VII.

Ableitung der partikularen Integrale aus Differenzial-Gleichungen.

§ 58.

Zur Ableitung der partikularen Integrale aus Differenzial-Gleichungen dienen zwei Methoden: Integration durch bestimmte Integrale, und Integration durch Reihen.

Die Integration durch bestimmte Integrale kann in speciellen Untersuchungen Vorzügliches leisten; und da schon im Vorhergehenden die allgemeinen Umrisse von ihr gegeben wurden, soll hier, statt der Begründung dieser Methode, was ausser den Grenzen der gegenwärtigen Untersuchung liegt, ein dem früheren ähnliches Beispiel behandelt werden, damit, durch Vergleichung, Anfang und Ausbildung dieser Integrations-Methode um so deutlicher hervortrete.

Es wird in der ausgebildeten Methode gleichfalls eine Function vorausgesetzt, aus der die gegebene Differenzial-Gleichung construirt werden soll, und diese Function wird nicht einfach als solche, sondern als bestimmtes Integral zweier Veränderlicher genommen, z. B. $y = \int_\beta^\alpha e^{ux} V du$, (wie bei Euler, nur dass x und u vertauscht sind).

Schon die Bezeichnung zeigt, dass nach u integrirt werden soll, V ist ebenfalls bloss eine Function von u, und y soll

das Integral einer Differenzial-Gleichung zwischen x und y sein z. B. von

$$xd^2y + 2adydx - b^2yxdx^2 = 0.$$

Wird nach x differenzirt, damit die einzelnen Glieder der gegebenen Gleichung construirt werden, so ist:

$$dy = dx\int_\beta^\alpha ue^{ux}Vdu\,,\quad d^2y = dx^2\int_\beta^\alpha u^2e^{ux}Vdu\,;$$

und die Substitution dieser Werthe in obiger Differenzial-Gleichung giebt:

$$\frac{xd^2y}{dx^2} + \frac{2ady}{dx} - b^2yx =$$

$$x\int_\beta^\alpha u^2e^{ux}Vdu + 2a\int_\beta^\alpha ue^{ux}Vdu - b^2x\int_\beta^\alpha e^{ux}Vdu = 0\,.$$

Da nach u integrirt wird, so können x und die Constanten a, b, hinter das Integral-Zeichen gesetzt werden. Es folgt daraus, wenn die zwei nach x gleichartigen Integrale zusammengenommen werden:

$$\int_\beta^\alpha 2aue^{ux}Vdu + \int_\beta^\alpha x(u^2 - b^2)e^{ux}Vdu = 0.$$

Wird das zweite Glied theilweise integrirt (damit x ausfalle), und wird das vom Integral-Zeichen freie Glied einzeln genommen, so folgt:

$$(u^2 - b^2)e^{ux}V + \int_\beta^\alpha e^{ux}\left[2auV - \partial\left(\frac{(u^2 - b^2)V}{\partial u}\right)\right] = 0\,.$$

Diese Glieder sind einzeln gleich Null, und geben zwei Gleichungen, aus denen u und V bestimmt werden. Aus der ersten Gleichung folgt:

1) $u^2 - b^2 = 0$, 2) $e^{ux} = 0$, also $u = \pm b$ und $u = -\infty$.

Diese drei Werthe von u sind nach vollzogener Integration statt α und β zu substituiren. Die zweite Gleichung giebt:

$$2auV + \partial\left(\frac{(u^2 - b^2)V}{\partial u}\right) = 0.$$

Wird die Differenzirung ausgeführt, dann folgt:

$$2auV\partial u - 2uV\partial u - (u^2 - b^2)\partial V = 0;$$

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{2u(a-1)\partial u}{u^2 - b^2}; \quad log\, V = log\,(u^2 - b^2)^{a-1} + log\, C$$

$$V = c(u^2 - b^2)^{a-1}.$$

Es ist daher:

$$y = c_1\int_{-b}^{+b} e^{ux}(u^2 - b^2)^{a-1}du + c_2\int_{-\infty}^{-b} e^{ux}(u^2 - b^2)^{a-1}du.$$

das Integral der gegebenen Differenzial-Gleichung. Wird nach ausgeführter Integration $u = \pm b$ gesetzt, so ist das Integral y bloss eine Function von x, was zu finden eben die Aufgabe war.

Zusatz 1. Ist a eine ganze positive Zahl, so vermindert sich durch fortgesetzte theilweise Integration der Exponent in $(u^2 - b^2)^{a-1}$ und wird endlich gleich Null, so dass der Werth des bestimmten Integrals hergestellt werden kann. Ist jedoch a negativ; so ist diess nicht möglich. Allein wenn man aus d^2V die integrirende Gleichung $d^2\Phi$ construirt, so folgt aus:

$$d^2y + X_1 dy dx + X_0 y dx^2 = 0$$

die Gleichung:

$$d^2\varphi - X_1 d\varphi dx + (X_0 dx - dX_1)\varphi dx^2 = 0,$$

wodurch im zweiten Gliede $+$ in $-$, und umgekehrt, verwandelt wird, was hier nicht weiter verfolgt wird.

Zusatz 2. Ist $a = 1$, so fällt $(u^2 - b^2)^{a-1}$ aus, und die Integration giebt sogleich:

$$y = c_{,}\int_{-b}^{b} e^{ux}du + c_{,,}\int_{-\infty}^{-b} e^{ux}dx;$$

$$y = \frac{c_{,}e^{\pm bx}}{x} + \frac{c_{,,}e^{-\infty x}}{x}$$

Das Integral $y = \dfrac{c_{,}e^{\pm bx}}{x}$ giebt die zwei bekannten partikularen

Integrale, und $y = \frac{c_{,,} e^{-\infty x}}{x} = 0$ giebt ein singuläres Integral der gegebenen Gleichung.

Zusatz 3. Fassen wir die Frage allgemein, so sei y eine Function zweier unabhängiger Veränderlicher

$$y = f(x,u), \text{ dann wird } dy = \frac{\partial y}{\partial x}\partial x + \frac{\partial y}{\partial u}\partial u,$$

$$d^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u}\partial x \partial u + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\partial u^2,$$

. . . .

Bei der Integration durch bestimmte Integrale geht man von $y = \int_\beta^\alpha e^{ux} V \partial u$ aus, was doch offenbar dem Gliede

$$\frac{\partial y}{\partial u}\partial u = e^{ux} V \partial u$$

entspricht.

Man kann auch von irgend einem Gliede des zweiten oder eines höheren Differenzials ausgehen und zu allgemeineren Resultaten gelangen, was hier nur angedeutet wird.

Zusatz 4. Eine weitere Anwendung hat diese Methode bei der Integration durch Reihen, wenn nämlich ein in Reihen ausgedrücktes Integral in einen geschlossenen bestimmten Integral-Ausdruck zusammengefasst werden kann, wie Euler im 2. Buch Cap. XI seiner Integral-Rechnung vorgezeichnet hat. In dieser Hinsicht ist diese Methode der nachfolgenden Untersuchung über die Integration mittelst unendlicher Reihen untergeordnet.

§ 59.

Die Ableitung der Integrale aus unendlichen Reihen wird gewöhnlich als das letzte Mittel angesehen, zu dem man schreitet, wenn keine der übrigen Integrations-Methoden zum Ziele führt. Man weiss von den Differenzial-Ausdrücken, dass sie jederzeit durch Reihen integrirt werden können, und erwartet ein

ähnliches Resultat auch bei der Integration der Differenzial-Gleichungen.

Die Ableitung der unendlichen Reihen erfolgt entweder aus der Differenzial-Reihe, oder aus der Methode der unbestimmten Coefficienten. Erstere wird gewöhnlich in die Mac-Laurin'sche und in die Taylor'sche Reihe getrennt, je nachdem in ihr die Näherungswerthe $x=0$ oder $x=\alpha$ substituirt werden.

Mac-Laurin'sche Reihe. Ist eine Differenzial-Gleichung zwischen x und y und ihren Differenzialien gegeben, und wird (bewusst oder unbewusst) der Näherungswerth $x=0$ substituirt, so macht dieser die Functionen von y, dy, $d^2y\ldots$ zu bestimmten Grössen y_0, dy_0, $d^2y_0\ldots$, und der wahre Werth von y, also das Integral, wird, wie bekannt, durch folgende Reihe gefunden:

$$y = y_0 + \frac{dy_0}{dx}x + \frac{d^2y_0}{dx^2}\frac{x^2}{2} + \frac{d^3y_0}{dx^3}\frac{x^3}{2.3} + \cdots + \frac{d^ny_0}{dx^n}\frac{x^n}{2.3..n} + \cdots$$

Da dy_0, d^2y_0, $d^3y_0\ldots d^ny_0\ldots$ durch die Substitution $x=0$ constante Grössen werden, so wird das Integral durch folgende nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe ausgedrückt:

$$y = A + Bx + \frac{Cx^2}{1.2} + \cdots \frac{Px^n}{1.2..n} + \cdots$$

Bei einer Gleichung des n^{ten} Grades, bleiben n Coefficienten: y_0, dy_0, $d^2y_0\ldots$ $d^{n-1}y_0$ unbestimmt, also willkührlich, während d^ny_0 durch die gegebene Gleichung d^nV bestimmt ist. Die nachfolgenden Werthe $d^{n+1}y_0$, $d^{n+2}y_0\ldots$ werden durch successive Differenzirung von d^nV bestimmt, und sind abhängig von den n Werthen y_0, $dy_0\ldots$ $d^{n-1}y_0$. Dadurch entstehen n Reihen, die nach den willkührlichen Constanten y_0, $dy_0\ldots$ $d^{n-1}y_0$ geordnet, die gesuchten n partikularen Integrale auf einmal liefern. Nur wenn durch die Substitution $x=0$, eine oder mehrere (μ) Constanten y_0, $dy_0\ldots$ $d^{n-1}y_0$ gleich Null würden, könnten statt n Reihen nur $(n-\mu)$ Reihen hervor-

gehen, so dass nicht alle, sondern bloss $(n-\mu)$ partikulare Integrale gefunden würden.

Beispiel. Gegeben sei die schon oft behandelte Gleichung:

$$xd^2y + 2dydx + n^2xydx^2 = 0.$$

Wird $x=0$ gesetzt, dann muss dy gleich Null sein, so dass nur ein partikulares Integral zu erwarten ist. Durch Division mit x wird die Gleichung:

$$d^2y + \frac{2dydx}{x} + n^2ydx^2 = 0;$$

das zweite Glied wird $\frac{0}{0}$, und der wahre Werth desselben wird durch Differenzirung von Zähler und Nenner gefunden. Es ist daher:

$$d^2y + \frac{2d^2ydx}{dx} + n^2ydx^2 = 0, \text{ also } 3d^2y_0 + n^2y_0dx^2 = 0,$$

$d^2y_0 = -\frac{n^2}{3}y_0dx^2$, so dass d^2y_0 durch y_0 bestimmt ist.

Durch successive Differenzirung der Gleichung erfolgt:

$$xd^3y + 3d^2ydx + n^2xdydx^2 + n^2ydx^3 = 0;$$
$$xd^4y + 4d^3ydx + n^2xd^2ydx^2 + 2n^2dydx^3 = 0;$$
$$xd^5y + 5d^4ydx + n^2xd^3ydx^2 + 3n^2d^2ydx^3 = 0.$$

. . . .

Daraus findet man durch Substitution von

$$x=0;\ dy=0;\ d^2y_0 = -\frac{n^2}{3}y_0dx^2;\ d^3y_0=0;\ d^4y_0 = \frac{n^4}{5}y_0dx^4;$$
$$d^5y_0 = 0;\ \ d^6y_0 = -\frac{n^6}{7}y_0dx^6;\dots$$

Diese Werthe in die obige Reihe substituirt, geben:

$$y = y_0\left(1 - \frac{n^2x^2}{1.2.3} + \frac{n^4x^4}{1.2.3.4.5} - \dots\right)$$
$$y = y_0\frac{\sin nx}{nx},$$

ein bloss partikulares Integral, was zu erwarten war, da die

zweite unbestimmte Constante dy_0 durch die gegebene Gleichung zu Null gemacht wird.

Uebrigens kennt man anderswoher das zweite partikulare Integral $y = C_2 \frac{\cos nx}{nx}$, das aus der Mac-Laurin'schen Reihe nicht abgeleitet werden kann, da $dy = d\left(C_2 \frac{\cos nx}{nx}\right)$ für $x = 0$ unendlich wird.

§ 60.

Die Taylor'sche Reihe giebt, wenn $x = \alpha$ gesetzt wird, wodurch y in die Constante y_α, dy in $dy_\alpha \ldots$ übergeht, das folgende Integral:

$$y = y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{dx}(x-\alpha) + \frac{d^2y_\alpha}{dx^2}\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \frac{d^3y_\alpha}{dx^3}\frac{(x-\alpha)^3}{2.3} + \ldots + \frac{d^ny_\alpha}{dx^n}\frac{(x-\alpha)^n}{2.3..n} + \ldots$$

Ist α ein Näherungswerth, also $x - \alpha$ hinlänglich klein, und wird keine der Constanten unendlich, so ist die Reihe convergent; y wird eine bestimmte, endliche Function von x, und ist in Wahrheit ein Integral der gegebenen Gleichung.

Auch von dieser Reihe gilt, wie von der Mac-Laurin'schen, dass n Constanten: y_α, dy_α, $d^2y_\alpha ..$ willkührlich bleiben. und erst d^ny_α, $d^{n+1}y_\alpha ..$ abhängig werden, so dass n Reihen entstehen, die nach den Constanten y_α, dy_α, $d^2y_\alpha ..$ geordnet, n partikulare Integrale zugleich und durch sie das vollständige Integral liefern.

Beispiel 1. Sei die frühere Gleichung gegeben:

$$xd^2y + 2dydx + n^2xydx^2 = 0,$$

so wird für $x = \alpha$: $d^2y_\alpha = -\frac{2dy_\alpha dx}{\alpha} - n^2y_\alpha dx^2$.

Es ist daher d^2y_α durch dy_α und y_α bestimmt.

Die nachfolgenden Constanten d^3y_α, d^4y_α.. ermittelt man aus den durch successive Differenzirung hervorgehenden Gleichungen, wie bei der Mac-Laurin'schen Reihe verfahren wurde, und findet durch die Substitution der successiv gefundenen Werthe alle Constanten durch y_α und dy_α bestimmt. Ordnet man nach ihnen die Reihen, so erhält man die beiden partikularen Integrale mit den willkührlichen Constanten: y_α, dy_α.

Es ist nicht der Mühe werth, diese für höhere Glieder fast unübersehbaren Substitutionen auszuführen; wir wählen daher (nach Cauchy) ein einfacheres Beispiel, um das Verfahren anschaulich zu machen.

Beispiel 2. Gegeben sei: $d^2y - a^2ydx^2 = 0$.
Es folgt: $d^2y_\alpha = a^2y_\alpha dx^2$; $d^3y_\alpha = a^2dy_\alpha dx^2$;

$$d^4y_\alpha = a^2d^2y_\alpha dx^2 = a^4y_\alpha dx^4;\quad d^5y = a^4dy_\alpha dx^4;\ldots$$

$$y = y_\alpha + \frac{dy_\alpha}{dx}(x-\alpha) + a^2y_\alpha\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + \frac{a^2dy_\alpha}{dx}\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3} +$$
$$+ a^4y_\alpha\frac{(x-\alpha)^4}{1.2.3.4} + \frac{a^4\,dy_\alpha}{dx}\frac{(x-\alpha)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

und nach y_α und dy_α geordnet:

$$y = y_\alpha\left(1 + \frac{a^2(x-\alpha)^2}{1.2} + \frac{a^4(x-\alpha)^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$
$$+ dy_\alpha\left((x-\alpha) + \frac{a^2(x-\alpha)^3}{1.2.3} + \frac{a^4(x-\alpha)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)$$

Kann man die Reihen summiren, wie diess hier der Fall ist, so erhält man

$$y = y_\alpha\left(\frac{e^{a(x-\alpha)} + e^{-a(x-\alpha)}}{2}\right) + \frac{dy_\alpha}{adx}\left(\frac{e^{a(x-\alpha)} - e^{-a(x-\alpha)}}{2}\right)$$

Summirt man beide Ausdrücke, so wird

$$y = C_{,}e^{ax} + C_{,,}e^{-ax};$$

und diess ist das vollständige Integral.

Kann man die resultirenden Reihen nicht durch bekannte Functionen summiren, so ist immer noch die Möglichkeit gegeben,

dass sie durch bestimmte Integrale summirt werden, so dass man auch in diesem Falle das Integral in einem geschlossenen Ausdrucke erhält.

§ 61.

Der Idee nach geben die Mac-Laurin'sche und die Taylor'sche Reihe das erwünschteste Resultat. Sie liefern die n partikularen Integrale von d^nV in n Reihen, und sie zerstören den Irrthum, der meint, dass man das vollständige Integral aus einer einzigen Reihe gewinnen könne. Das vollständige Integral von d^nV kann nur in n Reihen dargestellt werden, und dass die Mac-Laurin'sche und die Taylor'sche Reihe diess so entschieden herausstellen, verleiht ihnen hohen theoretischen Werth.

Diess ist aber auch Alles, was sie leisten. Es ist wohl schwerlich jemals aus ihnen ein Integral abgeleitet worden, (der Uebung willen nimmt man ganz einfache Beispiele, deren Integrale man aus anderen Methoden kennt.) Die Substitutionen, die sie erfordern, geben bei einigermassen zusammengesetzten Gleichungen einen viel zu verwickelten und fast unübersehbaren Coefficientenbau, so dass man von ihm aus schwerlich zu summirbaren Reihen gelangen wird. Doch diess sind technische Schwierigkeiten, die überwunden werden könnten. Anders verhält es sich mit Schwierigkeiten, die ihnen ihrem Wesen nach anhängen. Schon Cauchy sagt, dass diese Methoden mit „grosser Vorsicht" angewendet werden müssen, und es ist denkbar, dass sie im gewöhnlichen Sinn genommen, gar nicht allgemein angewendet werden dürfen. Sie setzen nämlich einen einzigen Werth, ($x=0$ in der Mac-Laurin'schen, und $x=a$ in der Taylor'schen Reihe) als den für sämmtliche partikulare Integrale zugleich gültigen Näherungswerth voraus, was allgemein nicht zutrifft, und nicht zutreffen kann.

So wenig bei algebraischen Gleichungen der Näherungswerth einer Wurzel zugleich ein Näherungswerth der übrigen Wurzeln ist, so wenig ist diess bei partikularen Integralen der Fall.

Bei Gleichungen des ersten Grades, in denen das partikulare und das vollständige Integral übereinstimmen, können sie eine ganz brauchbare Reihe liefern; hingegen bei Gleichungen der höhern Grade ist gewöhnlich nur eine der resultirenden Reihen brauchbar, wenn nämlich der für x substituirte Werth 0 oder α mit dem Näherungswerth eines partikularen Integrals zufällig harmonirt. Wenn man sich also nicht entschliesst, mit Absicht und Bewusstsein nach vorher geprüftem Näherungswerth nur eine Reihe, d. h. nur ein partikulares Integral abzuleiten, so sind die Mac-Laurin'schen und Taylor'schen Reihen nicht bloss mit grosser Vorsicht zu gebrauchen, sondern sie können gar nicht gebraucht werden, weil sie neben einer möglicherweise guten, viele andere unbrauchbare und möglicher Weise widersprechende Reihen liefern müssen, was nicht durch Vorsicht, sondern durch Erkenntniss des Wesens des Mac-Laurin'schen und Taylor'schen Satzes vermieden werden kann.

§ 62.

Eine weitere Methode der Herstellung des Integrals mittelst unendlicher Reihen ist die Methode der unbestimmten Coefficienten. Das Verfahren ist bekannt, und ich erläutere es kurz an einem der bekanntesten Beispiele. Es ist die Riccati-sche Gleichung:

$$d^2y - c^2x^\mu y dx^2 = 0.$$

Man setzt das Integral y gleich einer unendlichen Reihe:

$$y = A_0 + A_1 x^{p_1} + A_2 x^{p_2} + A_3 x^{p_3} + \dots$$

und bestimmt aus $d^2y - c^2x^\mu y dx^2 = 0$ die Werthe $A_0, A_1, A_2, \dots$ $p_1, p_2, p_3 \dots$ Es ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1 p_1 p_1 - 1 x^{p_1-2} + A_2 p_2 p_2 - 1 x^{p_2-2} + A_3 p_3 p_3 - 1 x^{p_3-2} + \dots$$

$$c^2x^\mu y = A_0 c^2 x^\mu \qquad + A_1 c^2 x^{\mu + p_1} \qquad + A_2 c^2 x^{\mu + p_2} \qquad + \dots$$

Diese Reihen kann man auf verschiedene Art und Weise verbinden:

I. Es seien je die ersten, zweiten, dritten &c. Glieder einander gleich:

$$A_1 p_1 p_1 - 1 x^{p_1 - 2} = A_0 c^2 x^\mu ; \quad p_1 - 2 = \mu ; \quad p_1 = \mu + 2 ;$$

$$A_1 = \frac{A_0 c^2}{\mu + 1 . \mu + 2} .$$

$$A_2 p_2 p_2 - 1 x^{p_2 - 2} = A_1 c^2 x^{\mu + p_1} ; \; p_2 = 2\mu + 4 ;$$

$$A_2 = \frac{A_0 c^4}{\mu + 1 . \mu + 2 . 2\mu + 3 . 2\mu + 4} ; \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Werthe in die ursprüngliche Reihe substituirt geben:

$$y = A_0 \left(1 + \frac{c^2 x^{\mu + 2}}{\mu + 1 . \mu + 2} + \frac{c^4 x^{2\mu + 4}}{\mu + 1 . \mu + 2 . 2\mu + 3 . 2\mu + 4} + \dots \right)$$

II. Es werde das erste Glied der ersten Reihe gleich Null gesetzt, und das zweite, dritte, vierte.. Glied der ersten Reihe je dem ersten, zweiten, dritten.. Glied der zweiten Reihe gleichgesetzt, so folgt:

$$A_1 p_1 p_1 - 1 x^{p_1 - 1} = 0, \quad \text{und daraus}$$

$$A_1 = 0, \text{ oder } p_1 = 0, \text{ oder } p_1 - 1 = 0.$$

1) $A_1 = 0$ giebt $A_3 = 0$, $A_5 = 0$, und

$$A_0 c^2 x^\mu = A_2 p_2 p_2 - 1 x^{p_2 - 2} ; \; p_2 = \mu + 2 ; \; A_2 = \frac{A_0 c^2}{\mu + 1 . \mu + 2} ;$$

Die ganze Reihe wird:

$$y = A_0 \left(1 + \frac{c^2 x^{\mu + 2}}{\mu + 1 . \mu + 2} + \frac{c^4 x^{2\mu + 4}}{\mu + 1 . \mu + 2 . 2\mu + 3 . 2\mu + 4} + \dots \right),$$

die mit der ersten Reihe ganz übereinstimmt.

2) $p_1 = 0$ giebt aus den Gleichungen

$$A_0 c^2 x^\mu = A_2 p_2 p_2 - 1 x^{p_2 - 2} \quad \text{und}$$

$$A_1 c^2 x^{\mu + p_1} = A_3 p_3 p_3 - 1 x^{p_3 - 2} \quad \text{die Reihe:}$$

$$y = (A_0 + A_1) \left(1 + \frac{c^2 x^{\mu + 2}}{\mu + 1 . \mu + 2} + \frac{c^4 x^{2\mu + 4}}{\mu + 1 . \mu + 2 . 2\mu + 3 . 2\mu + 4} + \dots \right)$$

die mit der ersten Reihe bis auf die Constanten übereinstimmt.

3) $p_1 = 1$ giebt aus den beiden Gleichungen:

$$A_0 c^2 x^\mu = A_2 p_2 p_2 - 1 x^{p_2 - 2} \text{ und } A_1 c^2 x^{\mu + p_1} = A_3 p_3 p_3 - 1 x^{p_3 - 2}$$
&c. &c.

die Reihen:

$$A_0 \left(1 + \frac{c^2 x^{\mu+2}}{\mu+1 . \mu+2} + \frac{c^4 x^{2\mu+4}}{\mu+1 . \mu+2 . 2\mu+3 . 2\mu+4} + \ldots\right)$$

$$A_1 \left(x + \frac{c^2 x^{\mu+3}}{\mu+2 . \mu+3} + \frac{c^4 x^{2\mu+5}}{\mu+2 . \mu+3 . 2\mu+4 . 2\mu+5} + \ldots\right).$$

III. Setzt man das erste Glied der zweiten Reihe gleich Null, und verbindet man das erste, zweite, dritte ... Glied der ersten Reihe je mit dem zweiten, dritten, vierten ... der zweiten Reihe, so folgt aus

$$A_0 c^2 x^\mu = 0, \quad A_0 = 0; \quad A_1 p_1 p_1 - 1 x^{p_1 - 2} = A_1 c^2 x^{\mu + p_1} \text{ \&c.}$$

Die Coefficienten A_1, A_2, ... bleiben ganz unbestimmt und es folgt aus jeder Gleichung: $p_1 - 2 = p_1 + \mu$; $p_2 - 2 = p_2 + \mu$; ... also überall $\mu = -2$, und die ganze Reihe wird:
$y = (A_1 + A_2 + A_3 \ldots) x^p$, und p wird aus $p . p - 1 = c^2$ bestimmt. In der That ist auch $y = Ax^p$ das Integral von $d^2y - c^2 x^{-2} dx^2$.

U. s. w.

Die sämmtlichen in I und II gefundenen Reihen stimmen in den folgenden Reihen überein:

$$y = C_1 \left(1 + \frac{c^2 x^{\mu+2}}{\mu+1 . \mu+2} + \frac{c^4 x^{2\mu+2}}{\mu+1 . \mu+2 . 2\mu+3 . 2\mu+4} + \ldots\right) +$$

$$C_2 \left(x + \frac{c^2 x^{\mu+3}}{\mu+2 . \mu+3} + \frac{c^4 x^{2\mu-5}}{\mu+2 . \mu+3 . 2\mu+4 . 2\mu+5} + \ldots\right),$$

die demnach wegen der beiden willkührlichen Constanten C_1, C_2 das totale Integral der gegebenen Gleichung liefern. Diese Reihen können bekanntlich durch die bestimmten Integrale der *Gamma*-Function summirt und in einem geschlossenen Ausdruck dargestellt werden.

§ 63.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten ist viel freier und beweglicher als die Methode der Differenzial-Reihen, auch sind durch sie schon Integrale entwickelt worden. Besonders leicht ist diese Methode bei einfachen binomischen Gleichungen. Diese Leichtigkeit der Behandlung schwindet jedoch bei zusammengesetzten Differenzial-Gleichungen, und selbst Euler, dem jede verwickelte Rechnung leicht war, spricht bei dieser Methode von „zu mühsamen Rechnungen", und zwar schon bei Gleichungen des zweiten Grades, wenn diese die Grössen y oder dy, in höherer als in erster Potenz enthalten. Dazu kommt noch, dass sämmtliche Coefficienten einzeln und empirisch berechnet werden müssen, ohne dass ihr Fortschreitungsgesetz durch die Methode irgend wie gegeben wäre. Was aber mehr als diess alles den unbedingten Gebrauch dieser Methode einschränkt, ist, dass sie nur Gültigkeit hat, wenn y für beliebig kleine Werthe von x nicht discontinuirlich wird. Denn die ganze Methode beruht auf der Voraussetzung, dass x so klein genommen werden dürfe, dass jedes vorhergehende Glied grösser bleibt, als die Summe aller nachfolgenden Glieder, und wo diess nicht der Fall ist, z. B. $y = arc\,sec\,.\,x$ (da die Secante eines Bogens niemals kleiner als 1 werden kann,) gilt die ganze Methode nicht, und die aus ihr abgeleiteten Reihen müssen Widersprechendes liefern, wenn die Voraussetzung nicht eintritt. Da man bei einer gegebenen Differenzial-Gleichung nicht unbedingt voraus weiss, ob die Function y, d. h. das gesuchte Integral, für $x = 0$ continuirlich bleibt oder nicht, so ist auch diese Methode, ihrer Natur nach, nicht allgemein anwendbar, und will man sie dennoch unbedingt anwenden, so hat man sich selber die Widersprüche zuzuschreiben, die man findet.

§ 64.

Diess sind die Methoden, aus gegebenen Differenzial-Gleichungen die partikularen Integrale herzustellen. Sie haben alle einen hohen theoretischen Werth, weil sie den Irrthum

nicht aufkommen lassen, dass ein vollständiges Integral durch eine einzige Reihe entwickelt werden könne. Allgemein entstehen nämlich auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten bei einer Gleichung des n^{ten} Grades durch n malige Differenzirung, n Reihen, da $d^n(A_0 + A_1 x^p + \dots)$ schon im ersten Gliede den Ausdruck: $A_1 p . p - 1 .. p - (n-1) x^{p-n}$ giebt, der für $p = 0$, $p = 1$, $p = 2 ..$ $p = n - 1$ nothwendig n verschiedene Reihen liefert, die eben so vielen partikularen Integralen entsprechen.

Wenn nun diese Reihen, namentlich in Verbindung mit bestimmten Integralen, bei speciellen Untersuchungen Vorzügliches leisten, so sind doch ihre Resultate auf viel zu begrenzte Gebiete eingeschränkt, als dass sie für die allgemeine Integration der Differenzial-Gleichungen, die ja alle integrirt sein wollen, hinreichen könnten. Und diess gilt nicht bloss von den reducirten linearen Differenzial-Gleichungen, von denen bisher gehandelt wurde, sondern auch von den nicht-reducirten und vollständigen.

Es ist daher eine Methode zu suchen, die dieser allgemeinen Forderung Genüge leistet. Auch darüber kann kein Zweifel bestehen, welches diese Methode sein könne. Wie bei algebraischen Gleichungen nur die näherungsweise Auflösung allgemein zum Ziele führt, so kann auch nur die näherungsweise Integration die allein und souverain durchgreifende Methode sein. Es ist nur die Frage, ob sie möglich ist, und ob eine solche Analogie zwischen algebraischen und Differenzial-Gleichungen stattfindet. Diess soll in der nachfolgenden Untersuchung erörtert werden.

VIII.

Integration durch Näherungswerthe.

§ 65.

Die Probleme der Integration sind streng genommen Umkehrungs-Probleme. — Gleichwie in den algebraischen Gleichungen z. B. $y^3 - ay^2 + b = 0$; $y - e \sin y - M = 0$ etc. die unbekannte Grösse y einfach als Function von a und b, oder von e und M gefunden werden soll, (worin die Auflösung der Gleichungen besteht,) eben so soll in den Differenzial-Gleichungen, die Function y, die zugleich mit ihren Differenzialien complicirt gegeben ist, einfach als Function von x und der mitverbundenen Constanten gefunden werden, (worin die Integration oder die Auflösung der Differenzial-Gleichungen besteht.) Die Integration auf diese Art, ohne eigentliche Integrations-Operationen, bloss durch Auflösung algebraischer Gleichungen herzustellen, ist und wird das Ideal der Integration sein und bleiben, das auch in einzelnen Gruppen von Differenzial-Gleichungen theilweise erreicht worden ist.

Was die Umkehrungs-Probleme betrifft, so hat die Analysis einen grossen Reichthum von Umkehrungs-Reihen, z. B. die Reihen von La Grange, La Place, Paoli, Euler und Andern. Da selbst die Mac-Laurin'sche und Taylor'sche Reihe darunter zu rechnen sind, freilich als die einfachsten von allen, so reiht sich die gegenwärtige Untersuchung an die frühere an, und wird die dort aufgenommenen und angefangenen Probleme auszubilden und zum Abschluss zu bringen haben.

Sämmtliche genannte Reihen haben die Eigenschaft, dass sie nach apriorischen Gesetzen und in höchst eleganter und übersichtlicher Form erscheinen, wie allgemein bekannt ist.

Sie haben jedoch mehr theoretische Eleganz, als praktische Brauchbarkeit, und in den meisten Fällen sind sie geradezu unbrauchbar, aus folgenden Gründen:

1) Die Grössen, nach deren aufsteigenden Potenzen die genannten Reihen entwickelt werden, sind durch die Gleichung selbst gegeben, und können nicht verändert, also auch nicht beliebig klein gemacht werden. Diese Grössen will ich der Kürze halber die Reste der Gleichung nennen. Es ist daher zufällig, wenn die nach den Resten der Gleichung entwickelten Reihen convergent sind, und brauchbare Werthe liefern.

2) Der Substitutions-Werth für y, (der Näherungswerth) ist durch den Rest der Gleichung bestimmt; denn er muss so gewählt werden, dass der vorgeschriebene Rest hervorgeht; er ist gleich Null in den Formeln von La Grange, oder gleich a in den Formeln von La Place &c. Da es nun höchst zufällig ist, dass diese vorgeschriebenen Substitutionswerthe wirkliche Näherungswerthe von y sind, so ist es auch zufällig, wenn die Reihen wirklich brauchbare Werthe von y liefern.

3) Es entsteht wegen des einen vorgeschriebenen Restes nur eine einzige, absolute Reihe, die zufällig zutreffen, d. h. mit einer wirklichen partikularen Reihe zusammentreffen kann, die aber in den meisten Fällen nicht zutreffen wird, und in keinem Falle mit mehr als einer, also nimmermehr mit sämmtlichen gleichberechtigten, aber unter sich verschiedenen, n partikularen Reihen zusammenfallen kann.

So giebt z. B. die La Grange'sche Reihe für die Gleichung $Fy = y^3 - 8y^2 + 8 = 0$, da der Rest $= 8$ vorgeschrieben ist, den Substitutionswerth $y = 0$, und es ist sehr zweifelhaft, ob eine nach den aufsteigenden Potenzen von 8 entwickelte Reihe brauchbar wird. Jedenfalls geht nur eine Reihe her-

vor, und doch weiss man mit der allergrössten Bestimmtheit, dass $Fy = y^3 - 8y^2 + 8 = 0$ drei Werthe von y hat, die sehr weit von einander abstehen können. Und nun verlangt man von der La Grange'schen Formel, (so wie von allen andern Formeln), dass in dieser einen Reihe die drei Werthe von y zugleich enthalten sein sollen, was unmöglich ist.

Der hier zu Grunde liegende gemeiusame Irrthum aller genannten Reihen besteht darin, dass man eine partikulare Reihe für die allgemeine Reihe nimmt. Offenbar müssen z. B. aus $y^3 - 8y^2 + 8 = 0$ drei Reihen hervorgehen, deren jede eine partikulare Wurzel der Gleichung liefert. So überzeugt man sich leicht, dass obige Gleichung drei Wurzeln hat, deren eine zwischen $+1$ und $+2$; deren andere zwischen $+7$ und $+8$; und deren dritte zwischen 0 und -1 liegt.

Substituirt man den ersten Näherungswerth: $y = +1$, dann wird die Gleichung: $(y^3 - 8y^2 + 7) + 1 = 0$; $y = 1$ ist eine Wurzel von $y^3 - 8y^2 + 7$, und $+1$ ist der Rest. Substituirt man den Näherungswerth $y = 8$ in $(y^3 - 8y^2) + 8 = 0$, so ist 8 eine Wurzel von $y^3 - 8y^2$ und $+8$ ist der Rest. Substituirt man den Näherungswerth $y = -1$ in $(y^3 - 8y^2 + 9) - 1 = 0$, so ist $y = -1$ eine Wurzel von $y^3 - 8y^2 + 9$, und -1 ist der Rest. Die drei Werthe von y werden nun in drei Reihen für $(y = 1, R = 1)$, für $(y = 8, R = 8)$, für $(y = -1, R = -1)$ entwickelt, und geben, wie eine leichte Rechnung zeigt, die drei Wurzeln: $y = 1{,}0748$; $y = 7{,}8708$; $y = -0{,}9456$. Der La Grange'sche Näherungswerth $y = 0$ kommt hier gar nicht vor, und dass der vorgeschriebene Rest 8 in der zweiten Substitution erscheint, ist zufällig.

Die Thatsache ist also, dass in diesen Reihen unbewusst eine partikulare Reihe entwickelt wird, während man die Meinung hat, dass sie die schlechthin allgemeine Reihe sei, (die es für algebraische Gleichungen nicht geben kann). Ich sage unbewusst; denn in allen diesen Reihen ist nirgends von einem Substitutionswerth die Rede, man ahnt nicht, dass man einen Näherungswerth substituirt, als ob es sich von selbst verstünde, dass man unbedingt ganz beliebig $y = 0$, oder $y = a$ substi-

tuiren dürfe. Indem man aber doch substituirt, thut man nichts anders, als dass man einen guten oder schlechten Näherungswerth setzt.

Daraus, dass jede aus Substitution hervorgehende Reihe nur eine partikulare Reihe ist, die also nur einen Näherungswerth liefert, (wenn sie überhaupt brauchbar ist), erklärt sich die sonst so schwer begreifliche Thatsache, um deren Beweis willen La Grange einen unglaublichen Rechnungs-Aufwand entfaltet hat, — die Thatsache, dass die Mac-Laurin'schen und die La Grange'schen Reihen jederzeit die kleinste Wurzel einer Function geben, (wenn sie überhaupt brauchbare Werthe liefern). Diess ist unendlich leicht zu erklären; denn da beide Reihen den Näherungswerth Null (unbewusst) substituiren, müssen sie als partikulare Reihen denjenigen Werth liefern, der dem Substitutionswerth Null am nächsten liegt. Diess ist aber die kleinste Wurzel, weil jede andere Wurzel weiter von Null entfernt, also auch grösser ist.

Den allen genannten Reihen gemeinsamen Irrthum, dass sie eine partikulare Reihe für die allgemeine halten, (die es im gewöhnlichen Sinne gar nicht geben kann,) habe ich in meiner Theorie des Differenzial-Calculs Cap. XV & XVI vollständig erörtert, und dort zugleich andere und allgemeinere Reihen entwickelt, worauf ich einfach verweise.

§ 66.

Bei den Differenzial-Gleichungen läuft man nicht Gefahr, partikulare und vollständige Integrale zu verwechseln; denn die Theorieen darüber sind zu ausgebildet, und die scharfe Bezeichnung der Integrations-Grenzen bei bestimmten Integralen macht vollends jede Verwechslung unmöglich.

Diese Resultate liefern übrigens einen Beitrag zu den Analogieen, die zwischen den algebraischen und den Differenzial-Gleichungen bestehen und nicht bestehen. Denn während es durchgehends ein vollständiges, (allgemeines) Integral giebt, das die Summe aller partikularen Integrale ist, giebt es bei

den algebraischen Gleichungen keine allgemeine Wurzel als Summe aller partikularen Wurzeln. Denn hat eine algebraische Gleichung z. B. drei Wurzeln: $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$, so ist keineswegs: $y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$; sondern wenn von einer allgemeinen Wurzel der algebraischen Gleichungen die Rede sein könnte, so wäre das Product: $(y_1 - a)(y_2 - b)(y_3 - c) = 0$ diese allgemeine Wurzel, in welchem Sinne sie jedoch niemals genommen, oder in Reihen berechnet worden ist.

Wenn es sich nun im Integral-Calcul gleichsam von selbst versteht, dass ein partikulares Integral nicht das allgemeine ist, so muss diess bei den algebraischen Reihen um so mehr betont werden, als es sich darum handelt, die Differenzial-Gleichungen auf das Gebiet der algebraischen Gleichungen hinüberzuspielen, ein Gebiet, auf dem von ihnen dasselbe gelten muss, was auf dem ihnen eigenthümlichen Gebiet der Integration gilt.

§ 67.

Von den als bekannt vorausgesetzten algebraischen Umkehrungs-Reihen dürfte folgende am zweckmässigsten eingerichtet sein:

Ist $Fy = 0$ eine Gleichung (algebraisch oder transcendent,) so wird sie in $Fa - R_a = 0$ zerlegt, wo Fa eine Gleichung bezeichnet, deren Wurzel $y_a = a$ bekannt ist, und R_a den Rest von $Fy = 0$. Der wahre Werth y wird dann durch folgende unendliche Reihe gefunden:

$$y = y_a + BR_a + \frac{C}{2} R_a^2 + \frac{D}{2.3} R_a^3 + \frac{E}{2.3.4} R_a^4 + \dots$$

Wird $\frac{dFa}{da}$ mit $F'a$, $\frac{d^2(Fa)}{da^2}$ mit $F''a$, $\frac{d^3(Fa)}{da^3}$ mit $F'''a, \dots$

bezeichnet, so ist

$$B = \frac{1}{F'a}, \quad C = -\frac{BF''a}{(F'a)^2}; \quad D = -\frac{BF'''a + 6CF'aF''a}{(F'a)^3}, \dots$$

wie hinlänglich bekannt ist.

Zusatz 1. Unter der Voraussetzung, dass man nach vollzogener Differenzirung den Werth $y = a$ substituirt, und alle Grössen, die $Fa = 0$ zu Factoren haben, weglässt, lassen sich die Coefficienten auch folgendermassen schreiben:

$$B = \frac{da}{d(Fa)}; \quad C = -\frac{Bd^2(Fa)}{d^2(Fa)^2}; \quad D = -\frac{Bd^3(Fa) + Cd^3(Fa)^2}{d^3(Fa)^3}$$

$$E = -\frac{Bd^4(Fa) + Cd^4(Fa)^2 + Dd^4(Fa)^3}{d^4(Fa)^4}$$

. . . .

was dieselben Werthe giebt.

Die Coefficienten in dieser Form dargestellt, machen das Fortschreitungs-Gesetz sogleich deutlich, von dem übrigens in den angeführten Untersuchungen bewiesen ist, dass es allgemein, für jedes n^{te} Glied gilt.

Zusatz 2. Eine noch übersichtlichere Form erhält diese Reihe in folgender Darstellung:

$$y = y_a + \frac{1}{F'a}R_a + \frac{1}{daF'a}d\left(\frac{1}{F'a}\right)\frac{R_a^2}{1.2} +$$

$$+ \frac{1}{da^2F'a}d\left[\frac{1}{F'a}d\left(\frac{1}{F'a}\right)\right]\frac{R_a^3}{1.2.3} + \cdots$$

deren Fortschreitungs-Gesetz gleichfalls in die Augen fällt, und allgemein gilt, weil nach ausgeführten Operationen diese Reihe mit den beiden vorhergehenden identisch wird.

Zusatz 3. Für die Rechnung jedoch ist die erste Reihe vorzuziehen, da sie nur diejenigen Grössen enthält, die man wirklich braucht, während in den beiden andern Reihen durch die angedeuteten Operationen, wenn sie ausgeführt werden, viele Glieder eintreten, die nach der Substitution $y = a$ wieder ausfallen.

Beispiel 1. In der Gleichung $Fy = y^3 - 8y^2 + 8 = 0$ werde die Wurzel gesucht, die zwischen 1 und 2 liegt. — Der

Näherungswerth $y = 1$ macht $y^3 - 8y^2 + 7$ gleich Null. Es ist daher:

$$Fy = Fy_a - R_a = (y^3 - 8y^2 + 7) + 1 = 0, \quad \text{und } R_a = -1.$$

Nun ist $y_a = 1$; $F'a = 3y^2 - 16y = -13$; $F''a = 6y - 16 = -10$,

$$F'''a = 6 \quad \&c.$$

Daraus findet man $B = -\frac{1}{13}, \; \frac{C}{2} = \frac{10}{2.13^3}$, &c.

und $y = y_a + BR_a + \frac{C}{2}(R_a)^2 + \frac{D}{2.3}(R_a)^3 + \dots$ wird:

$$y = 1 + 0{,}07692 - 0{,}00227 + 0{,}00015 - \dots;$$

$$y = 1{,}0748.$$

Auf gleiche Weise findet man die Wurzeln für den Näherungswerth 8 und für den Näherungswerth -1, also sämmtliche drei Wurzeln in drei verschiedenen Reihen.

Beispiel 2. Es sei gegeben: $\sin x = z$ und es soll x aus z gefunden werden. Kennt man einen Näherungswerth von x, z. B. $\sin x = 0{,}51$, so ist $\sin 30^0 = 0{,}5$, also $z = 0{,}51$, $a = 30^0$, so dass $\sin x_a - \sin a = 0$ wird. Dann entsteht der Rest, wenn in $\sin x = z$ auf beiden Seiten $\sin a$ subtrahirt wird:

$$\sin x - \sin a = z - \sin a; \quad Fa = \sin x - \sin a,$$

$$Ra = z - \sin a, \quad = 0{,}51 - 0{,}5 = 0{,}01.$$

Nun ist $F'a = \cos a$; $F''a = -\sin a$ &c.

und daraus folgt nun

$$x = a + \frac{Ra}{\cos a} + \frac{\sin a}{\cos a^3}\frac{(Ra)^2}{2} +$$
$$+ \left(\frac{1}{\cos a^3} + \frac{3\sin a^2}{\cos a^5}\right)\frac{(Ra)^3}{2.3} + \dots$$

oder $R_a = z - \sin a = \sin x - \sin a$ substituirt:

$$x = a + \left(\frac{\sin x - \sin a}{\cos a}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\sin a(\sin x - \sin a)^2}{\cos a^3} +$$
$$+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{\cos a^3} + \frac{3\sin a^2}{\cos a^5}\right)(\sin x - \sin a)^3 + \dots$$

Substituirt man den Näherungswerth $a = 0$, also $\sin a = 0$, $\cos a = 1$, so entsteht die Mac-Laurin'sche Reihe

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3} \sin x^3 + \ldots,$$

die mit der vorhergehenden Reihe in Bezug auf Allgemeinheit und Convergenz nicht verglichen werden kann. Nach obiger Reihe können unendlich viele Werthe gefunden werden, weil die transcendente Gleichung $\sin x = z$ unendlich viele Wurzeln hat; nicht bloss x, sondern auch $x + 2n\pi$ haben den nämlichen Sinus, und nicht bloss a, sondern überhaupt $a + 2n\pi$ sind brauchbare Näherungswerthe. U. s. w.

§ 68.

Um zu den Differenzial-Gleichungen überzugehen, so sei $d^n V = 0$ gegeben, die der Kürze halber mit $\mathfrak{V} = 0$ bezeichnet werde. Kennt man einen Näherungswerth derselben, so kann diess offenbar nur ein partikulares Integral von der Form $y = fx$ sein. Um die Begriffe zu fixiren, sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2dy}{xdx} - b^2y = X.$$

Ist X für $x \gtrless \pm 1$ eine beliebig kleine Grösse, so ist ein partikulares Integral der reducirten Gleichung

$$\mathfrak{V}_a = \frac{d^2y}{dx} + \frac{2dy}{xdx} - b^2y = 0$$

ein Näherungswerth der vollständigen Gleichung, und X ist nach früherer Bezeichnung der Rest Ra, nach dessen aufsteigenden Potenzen die dem substituirten partikularen Integrale entsprechende Reihe entwickelt werden kann.

Man braucht nur B, C, $D \ldots$ aus $d\mathfrak{V}_a$, $d^2\mathfrak{V}_a \ldots$ zu bestimmen und zu substituiren. Allein hier, so nahe am Ziele, scheinen sich unüberwindliche Schwierigkeiten zu erheben. Denn wenn die Differenzial-Gleichung $d^n V = \mathfrak{V}_a$ für das substituirte partikulare Integral gleich Null ist, dann müssen auch $d^{n+1}V$,

$d^{n+2}V \ldots$ und alle nachfolgenden Differenzial-Gleichungen ebenfalls gleich Null sein. Diese sind $d\mathfrak{V}_a$, $d^2\mathfrak{V}_a$, $d^3\mathfrak{V}_a, \ldots$ Da nun die Coefficienten der Reihe $y = y_a + BR_a + \frac{C}{2}(R_a)^2 + \ldots$ durch $\frac{1}{d\mathfrak{V}_a}$, durch $d^2\mathfrak{V}_a$ &c. bestimmt werden, so sind sie entweder sämmtlich unendlich gross, oder unbestimmbar $\frac{0}{0}$, da jede fortgesetzte Differenzirung nur den Werth $d^{n+\mu}V = 0$ geben zu können scheint.

Bei algebraischen Gleichungen verhält es sich anders. Denn ist z. B. $x = 2$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$, so ist ihr Differenzial: $2x - 3$ für $x = 2$ keineswegs gleich Null, sondern ein bestimmter endlicher Werth, hier 1, (wenn nicht etwa die Gleichung gleiche Wurzeln hat, was besonders untersucht wird).

§ 69.

Die im Wege stehende Schwierigkeit, dass die Differenzial-Gleichung $d^n V = 0$, wieder differenzirt jedesmal gleich Null wird, und dieselben Integrale behält, (während die aufeinanderfolgenden Differenzialien der algebraischen Gleichungen verschiedene Wurzeln haben,) ist jedoch mehr scheinbar, als wirklich; und kann leicht gehoben werden. Denn ist $y = fx$ $\left(\text{etwa } y = \frac{e^{\lambda x}}{x},\right)$ ein Integral der reducirten Gleichung: $\frac{d^2y}{dx} + \frac{2dy}{xdx} - b^2y = 0 = \mathfrak{V}_a$, so wird in $d(\mathfrak{V}_a)$ nicht nach x differenzirt, sondern nach λ, das von x unabhängig ist, (ob $y = \frac{e^{\lambda x}}{x}$ oder, wie bei bestimmten Integralen $y = \frac{e^{ux}}{x}$ geschrieben wird, ist völlig gleichgültig).

Denn bei Auffindung der Integrale aus Näherungswerthen handelt es sich um die Differenzirung der durch die Näherungswerthe bestimmten Gleichung. Es wird daher $\mathfrak{V} = 0$ nach einer

neuen unabhängigen Veränderlichen differenzirt, gerade wie bei bestimmten Integralen, oder es wird die Differenzial-Gleichung geradezu in eine algebraische Gleichung verwandelt, was das Einfachste ist.

So giebt z. B. $\frac{e^{\lambda x}}{x}$ in die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2dy}{xdx}-b^2y=0$ substituirt, die algebraische Gleichung: $\mathfrak{V}=(\lambda^2-b^2)\frac{e^{\lambda x}}{x}$, da sich die übrigen Glieder identisch aufheben, wie eine leichte Rechnung zeigt. Die algebraische Gleichung $\mathfrak{V}=(\lambda^2-b^2)\frac{e^{\lambda x}}{x}$, wird für $\lambda=\pm b$ gleich Null, sowohl $\frac{e^{bx}}{x}$, als $\frac{e^{-bx}}{x}$ sind Näherungswerthe der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2dy}{xdx}-b^2y=X$, und die beiden wahren Werthe y, können durch sie hergestellt werden.

Es ist nämlich $\frac{d\mathfrak{V}}{d\lambda}=\frac{2\lambda e^{\lambda x}}{x}+(\lambda^2-b^2)e^{\lambda x}$;

$$\frac{d^2\mathfrak{V}}{(d\lambda)^2}=2e^{\lambda x}+4\lambda e^{\lambda x}+x(\lambda^2-b^2)e^{\lambda x};$$

$$\frac{d^3\mathfrak{V}}{(d\lambda)^3}=6e^{\lambda x}+6\lambda xe^{\lambda x}+x^2(\lambda^2-b^2)e^{\lambda x};\ \text{u. s. w.}$$

Für $\lambda=+b$ wird $\frac{d\mathfrak{V}}{d\lambda}=\frac{2be^{bx}}{x}$; $\frac{d^2\mathfrak{V}}{(d\lambda)^2}=\frac{2e^{bx}}{x}+4be^{bx}$;

$$\frac{d^3\mathfrak{V}}{(d\lambda)^4}=6e^{bx}+6bxe^{bx}.$$

Für $\lambda=-b$ wird $\frac{d\mathfrak{V}}{d\lambda}=-\frac{2be^{-bx}}{x}$; $\frac{d^2\mathfrak{V}}{(d\lambda)^2}=\frac{2e^{-bx}}{x}-4be^{-bx}$;

$$\frac{d^4\mathfrak{V}}{(d\lambda)^2}=6e^{-bx}-6bxe^{-bx}.$$

Die ersten aus $y=b$ abgeleiteten Werthe geben das partikulare Integral:

$$y_1=\frac{e^{bx}}{x}+\frac{x}{2b}\cdot\frac{X}{e^{bx}}-\frac{\left(\frac{2}{x}+4b\right)}{(2b)^3}x^2\cdot\frac{X^2}{2.(e^{bx})^2}\ \cdots$$

Die zweiten aus $y = -b$ abgeleiteten Werthe geben:

$$y_2 = \frac{e^{-bx}}{x} - \frac{xe^{bx}X}{2b} + \frac{\left(\frac{2}{x} - 4b\right)x^2(e^{bx})^2}{(2b)^3} \cdot \frac{X^2}{2} - \ldots$$

Die Reihen sind brauchbar, wenn $\frac{e^{\lambda x}}{x}$ wirklich ein Näherungswerth der gegebenen vollständigen Gleichung ist. Doch müssen diese Reihen summirt werden, wenn es sich um ein Integral in geschlossenen Ausdrücken handelt.

Die erhobene Schwierigkeit löst sich also dadurch, dass $\mathfrak{V}_a$ nicht nach x, sondern nach neuen, in algebraischen Gleichungen auftretenden Veränderlichen differenzirt wird. Es bleibt demnach die Aufgabe, die Gesetze zu ermitteln, nach denen Differenzial-Gleichungen durch partikulare Integrale in algebraische Gleichungen umgewandelt werden.

§ 70.

Für jede Differenzial-Gleichung $\frac{d^n V}{dx^n} = 0$ giebt es Substitutionen, durch die sie in eine algebraische Gleichung umgewandelt werden kann. Die Bedingungen bei diesen Substitutionen sind:

1) dass sie die Differenzial-Gleichung nicht identisch gleich Null machen, denn daraus kann kein Werth der unabhängigen Veränderlichen abgeleitet werden;

2) dass die Veränderliche x oder Functionen von ihr, nicht in der algebraischen Gleichung enthalten bleiben, sondern als Factoren ausgeschieden sind. Denn wäre x in der algebraischen Gleichung selbst enthalten, so würde für sie ein bestimmter Werth gefunden, und sie bliebe nicht mehr eine schlechthin allgemeine veränderliche Grösse, als welche sie doch in der Differenzial-Gleichung gegeben ist. Beide Bedingungen werden durch die folgenden Beispiele erläutert.

Sei die Differenzial-Gleichung des ersten Grades $\frac{dy}{dx} - 2bxy = 0$ durch Substitution in eine algebraische Gleichung zu verwandeln. Das Integral partikular genommen ist: $y = e^{bx^2}$. Die Substitution dieses Werthes macht die Differenzial-Gleichung identisch gleich Null, und liefert keine algebraische Gleichung.

1) Wird nun in $y = e^{bx^2}$ die Constante b allgemein genommen und mit λ oder u &c. bezeichnet, so giebt die Substitution $y = e^{\lambda x^2}$ die algebraische Gleichung:

$$2(\lambda - b)xe^{\lambda x^2} = 0 = \vartheta\,,$$

die für $\lambda = b$ zu Null wird, während $xe^{\lambda x^2}$ als Factor ausgeschieden ist. Hingegen wird $d\vartheta_a$ für $\lambda = b$ nicht Null, sondern $2xe^{bx^2}d\lambda$. U. s. w.

2) Würde statt $y = e^{bx^2}$ eine andere Function z. B. $y = x^\mu$ in dV substituirt, so würde die algebraische Gleichung erfolgen:

$$\mu x^{\mu-1} - 2bx^{\mu+1} = 0\,,\quad \mu - 2bx^2 = 0\,,\ \text{wodurch}\ x = \pm\frac{\mu}{2b},$$

statt allgemein veränderlich zu bleiben, algebraisch bestimmt würde, was gegen das Wesen des Problems ist.

Zutreffende Substitutionen liefern die Operationen des VI. Abschnitts und die Operationen der bestimmten Integrale, die im VII. Abschnitt erläutert wurden.

Die Operationen des VI. Abschnittes beruhen darauf, dass einerseits die Differenzial-Gleichung als Problem erscheint, und dass andrerseits eine algebraische Gleichung construirt wird, die das partikulare Integral und zugleich die nöthigen Bedingungs-Gleichungen zur Bestimmung der neuen, unabhängigen Veränderlichen giebt.

So ist z. B. § 47 durch $y = e^{\lambda x}$ gefunden worden, einerseits:

$$d^n y + Ad^{n-1}ydx + Bd^{n-2}ydx^2 + \ldots Ldydx^{n-1} + Mydx^n = 0$$

und andrerseits als algebraische Gleichung:

$$(\lambda^n + A\lambda^{n-1} + B\lambda^{n-2} + \ldots\ L\lambda + M)e^{\lambda x}dx^n = 0.$$

Letztere Gleichung nach λ differenzirt giebt endliche Werthe für die n Wurzeln λ, wenn nicht etwa die Gleichung mehrere gleiche Wurzeln hat, was eine Schwierigkeit der Algebra, nicht der Integration ist, die übrigens durch die Transformation der gegebenen Gleichung $d^n V$ in die integrirende Gleichung $d^n \Phi$ gehoben werden kann.

Alle im VI. Abschnitte gewählten Substitutionen erläutern das Verfahren, die Differenzial-Gleichungen durch partikulare Integrale in algebraische Gleichungen umzuwandeln.

§ 71.

Das Verfahren dieser Umwandlung durch bestimmte Integrale, ist strenggenommen das nämliche, wie das Verfahren im VI. Abschnitte, was auch an seinem Orte bewiesen worden ist. Diess soll noch an einem relativ allgemeinen Beispiele gezeigt werden. Es ist die durch die Mechanik gegebene Gleichung:

$$(a_0 + b_0 x)y + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_2 + b_2 x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \dots$$
$$+ (a_{n-1} + b_{n-1} x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (a_n + b_n x)\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

eine Gleichung, die schon Euler ausführlich behandelt hat, und die seitdem unablässig in Angriff genommen wurde.

Das Integral sei: $y = \int e^{xu} V du$ und V bloss eine Function von u. Durch Differenzirung nach x findet man:

$$\frac{dy}{dx} = \int u e^{xu} V du; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \int u^2 e^{xu} V du, \text{ \&c.}$$

Werden diese Werthe in die Gleichung substituirt, und die Coefficienten $a_0 + b_0 x$; $a_1 + b_1 x$, $a_2 + b_2 x$, &c. unter das Integral-Zeichen gestellt, was erlaubt ist, da nach u integrirt wird, so erhält man, wenn

$$U_0 = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$$
$$U_1 = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_n u^n$$

gesetzt wird:

$$\int U_0 e^{xu} V du + \int U_1 x e^{xu} V du = 0.$$

Durch theilweise Integration des zweiten Integrals:

$$\int U_1 x e^{xu} V du = U_1 V e^{xu} - \int \frac{d(U_1 V)}{du} e^{xu} du$$

wird die Gleichung gefunden:

$$U_1 V e^{xu} + \int \left(U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} \right) e^{xu} du = 0$$

(worin die Function von x, nämlich e^{xu} als Factor ausgeschieden ist.)

Diese Gleichung ist die gesuchte algebraische Gleichung, und ausserdem giebt die unter dem Integral-Zeichen stehende Function: $U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} = 0$ die Mittel, die unbekannte Grösse V durch die bekannten Functionen U_0 und U_1 zu bestimmen. Da $U_0 V - \frac{d(U_1 V)}{du} = 0$ in Beziehung auf u eine gewöhnliche totale Differenzial-Gleichung ersten Grades ist, so ist, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$\log V = \int \frac{U_0}{U_1} du - \log U_1 + \log C.$$

Diese Werthe bestimmen vollständig die algebraische Gleichung, die statt der Differenzial-Gleichung eintritt.

Beispiel. Es sei in

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} - b^2 x y = 0$$

die Constante $a = 2$, dann wird

$$y = \int (u^2 - b^2)^{a-1} e^{ux} du;$$

$$y = \frac{e^{ux}}{x^2} \left(\frac{1}{x} - u \right).$$

Wird $u = \pm b$ substituirt, so ist das totale Integral der Differenzial-Gleichung: $\frac{xd^2y}{dx^2} + \frac{4dy}{dx} - b^2xy = 0$

$$y = \mathfrak{A}\frac{e^{bx}}{x^2}\left(\frac{1}{x} - b\right) + \mathfrak{B}\frac{e^{-bx}}{x^2}\left(\frac{1}{x} + b\right).$$

Die für die Differenzial-Gleichung für jeden Näherungswerth eintretende algebraische Gleichung findet man am einfachsten, wenn man

$$y = \frac{e^{ux}}{x^2}\left(\frac{1}{x} - u\right) \quad \text{in} \quad \frac{xd^2y}{dx^2} + \frac{4dy}{dx} - b^2xy = 0$$

substituirt Es folgt:

$$u^2e^{ux}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{u}{x}\right) + ue^{ux}\left(\frac{-6}{x^3} + \frac{4u}{x^2}\right) + e^{ux}\left(\frac{12}{x^4} - \frac{6u}{x^3}\right)$$

$$+ 4\left[ue^{ux}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{u}{x^2}\right) + e^{ux}\left(\frac{-3}{x^4} + \frac{2u}{x^3}\right)\right]$$

$$- b^2e^{ux}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{u}{x}\right).$$

Es bleibt noch, da sich alle übrigen Glieder unter sich heben:

$$\mathfrak{V} = \frac{e^{ux}}{x}\left(\frac{1}{x} - u\right)(u^2 - b^2),$$

das für $u = \pm b$ gleich Null wird; keineswegs wird aber auch

$$d\mathfrak{V} = \frac{2ue^{ux}}{x}\left(\frac{1}{x} - u\right) + (u^2 - b^2)d\left[\frac{e^{ux}}{x}\left(\frac{1}{x} - u\right)\right],$$

für $u = \pm b$ ebenfalls gleich Null.

Die hier gefundenen partikularen Integrale sind also binomisch; sie können auch trinomisch u. s. w. sein, was von der Zahl der auszuführenden Integrationen $y = \int e^{ux} V du$ abhängt. Wie sogleich einleuchtet, sind die Operationen der bestimmten Integrale ganz übereinstimmend mit den directen Operationen des VI. Abschnittes.

Zusatz. Dasselbe Verfahren ist auf die allgemeinere Gleichung anzuwenden:

$$(a_0 + b_0 x^\mu)y + (a_1 + b_1 x^\mu)\frac{dy}{dx} + (a_2 + b_2 x^\mu)\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots;$$

denn da in jedem Gliede die gleiche Potenz x^μ enthalten ist, so wird mit Leichtigkeit der Factor e^{ux^μ} aus der algebraischen Gleichung ausgeschieden.

§ 72.

Tritt der Fall ein, dass die aus der Differenzial-Gleichung abgeleitete algebraische Gleichung $\mathfrak{V}a$ mehrere gleiche Wurzeln hat, dann ist, sowohl die allgemeine als die näherungsweise Integration mit Hilfe der integrirenden Gleichung $d^n\Phi$ durchzuführen, wie in früheren Abschnitten erörtert wurde. Diese Transformation ist die durchgreifende und für alle Differenzial-Gleichungen ausreichende apriorische Transformation.

Da es sich treffen kann, dass bei solchen Transformationen statt des einfachen Integrals y, sogleich eine Function von y, z. B. y^2, $\log y$, e^y gesucht wird, so sind für diesen Fall die entsprechenden Umkehrungsreihen zu construiren, und diess ist gerade das Gebiet, auf dem sich die Reihen von Paoli, La Grange und La Place vornehmlich bewegen.

Bezeichnet man die zu suchende Function mit ψy, den Rest, den die Substitution des Näherungswerthes $y = fx$ giebt, mit Ra (wie in den vorhergehenden Reihen, deren übrige Bezeichnungen beibehalten werden), so sei die entsprechende Function des Näherungswerthes ψy_a, oder einfach ψ.

Die gesuchte Reihe wird dann:

$$\psi y = \alpha + \beta Ra + \gamma (Ra)^2 + \delta (Ra)^3 + \ldots$$

und es ergiebt sich: $\alpha = \psi$, $\beta = \dfrac{d\psi}{d\mathfrak{V}_a} = \dfrac{\psi'}{\mathfrak{V}'}$,

$$\gamma = \frac{d^2\psi - \beta d^2\mathfrak{V}}{2(d\mathfrak{V})^2},$$

$$\delta = \frac{d^3\psi - \dfrac{d\psi}{d\mathfrak{V}}d^3\mathfrak{V} - 3\left(\dfrac{d^2\psi}{d\mathfrak{V}} - \dfrac{d\psi}{(d\mathfrak{V})^2}d^2\mathfrak{V}\right)d^2\mathfrak{V}}{2\,.\,3\,(d\mathfrak{V})^3} \quad \text{u. s. w.}$$

Beweis: Die Reihe

$$\psi y = \alpha + \beta Ra + \gamma(Ra)^2 + \delta(Ra)^3 + \varepsilon(Ra)^4 + \dots$$

giebt für $y = y_a$ den Rest $Ra = \mathfrak{V}a = 0$; es fallen demnach alle Glieder weg bis $\psi y_a = \alpha$, woraus $\alpha = \psi$ folgt.

Ferner ist: $\dfrac{\psi y - a}{Ra} = \beta + \gamma Ra + \delta(Ra)^2 + \dots$;
für $y = y_a$, wird $Ra = \mathfrak{V}a = 0$, und es bleibt:
$\dfrac{\psi y - \alpha}{\mathfrak{V}a} = \dfrac{0}{0} = \beta$. Durch Differenzirung von Zähler und Nenner folgt $\dfrac{d\psi}{d\mathfrak{V}_a} = \beta = \dfrac{\psi'}{\mathfrak{V}'}$. Ferner ist

$$\frac{\psi y - \alpha - \beta Ra}{(Ra)^2} = \gamma + \delta Ra + \varepsilon(Ra)^2.$$

Für $y = y_a$ wird $Ra = \mathfrak{V}a = 0$; der Werth rechts des Gleichheits-Zeichens wird γ; der Werth links des Gleichheits-Zeichens wird $\dfrac{0}{0}$, bleibt nach einmaliger Differenzirung von Zähler und Nenner gleich $\dfrac{0}{0}$ und wird nach zweimaliger Differenzirung von Zähler und Nenner: $\dfrac{d^2\psi - \beta d^2\mathfrak{V}}{d(\mathfrak{V}^2)}$. Eben so wird
$\delta = \dfrac{d^3\psi - \beta d^3\mathfrak{V} - \gamma d^3(\mathfrak{V}^2)}{d^3(\mathfrak{V}^3)}$, und das Fortschreitungs-Gesetz dieser Reihe wird sehr leicht allgemein bewiesen.

Werden die angedeuteten Operationen ausgeführt, und alle Glieder weggelassen, die $\mathfrak{V}_a = 0$ zum Factor haben, so folgt die vorausgehende Reihe.

Werden hingegen diese Operationen nicht ausgeführt, sondern nur angedeutet, so erfolgt, unter der Bedingung, dass nach vollzogenen Operationen alle Glieder, die $\mathfrak{V}a = 0$ zum Factor haben, wegfallen, die Reihe in folgenden einfachen Symbolen: $\psi y =$

$$\psi + \frac{\psi'}{\mathfrak{V}'}Ra + \frac{1}{da\mathfrak{V}'}d\left(\frac{\psi'}{\mathfrak{V}'}\right)\frac{(Ra)^2}{2} + \frac{1}{da^2\mathfrak{V}'}d\left[\frac{1}{\mathfrak{V}'}d\left(\frac{\psi'}{\mathfrak{V}'}\right)\right]\frac{(Ra)^3}{2.3} + \dots$$

deren Fortschreitungs-Gesetz in die Augen fällt, und ebenfalls allgemein gilt, wie in den Untersuchungen über diese Reihen bewiesen worden ist.

§ 73.

Die bisherigen Untersuchungen beschränken sich aaf die Integration der vollständigen linearen Differenzial-Gleichungen. Da diese jedoch mit Hilfe der integrirenden Gleichung $d^n\Phi$ ohnehin in geschlossenen Ausdrücken integrirt werden können, wenn die Integrale ihrer reducirten Gleichungen bekannt sind, so scheint es überflüssig zu sein, sie durch Reihen zu integriren. Doch hat man alle Ursache, diess beizubehalten und weiter auszubilden. Denn ein geschlossenes Integral ist zwar ein ausdrucksvolles Symbol, aber die in ihm angedeuteten Operationen sind in vielen Fällen von der verwickeltsten Art, so dass es oft vortheilhaft ist, die Integrale durch Reihen herzustellen. Ueberdiess hat man dadurch ein und dasselbe Integral einerseits in einem geschlossenen Ausdruck und andrerseits in einer Reihe, so dass ersterer die Reihe summirt. Diess ist eine Methode, durch partikulare Integrale Reihen zu summiren, die vielleicht auf andere Art nicht summirt werden könnten, was ein nicht gering anzuschlagender Gewinn ist.

Für das nächste Ziel der Integration ist es aber allerdings wichtiger, die partikularen Integrale der reducirten Gleichung selbst zu finden, wenn sie unbekannt sind. Diess kann auf folgende Art eingeleitet werden.

Gleichwie die frühere Gleichung $y^3 - 8y^2 + 8 = 0$ für eine ihrer Wurzeln z. B. 8 nicht bloss in $(y^3 - 8y^2) + 8 = 0$, sondern beliebig z. B. in $\left(\frac{63}{64}y^3 - 8y^2 + 8\right) + \frac{1}{64}y^3 = 0$ zerlegt werden kann, worin $\frac{63}{64}y^3 - 8y^2 + 8$ die Gleichung Va ist, die für $y = 8$ zu Null wird, und $-\frac{1}{64}y^3$ der Rest Ra, nach dessen aufsteigenden Potenzen die Reihe entwickelt wird — eben so

kann eine Differenzial-Gleichung z. B. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{X_1 dy}{dx} + X_0 y = 0$ in $\frac{d^2y}{dx^2} + (X_1 + \alpha)\frac{dy}{dx} + (X_0 + \beta)y - \left(\alpha\frac{dy}{dx} - \beta y\right) = 0$ beliebig zerlegt werden. Kennt man nun ein partikulares Integral von $\frac{d^2y}{dx^2} + (X_1 + \alpha)\frac{dy}{dx} + (X_0 + \beta)y = 0$, so wird $\vartheta a = 0$ und $Ra = \frac{\alpha dy}{dx} + \beta y$ hergestellt, und der genäherte Werth y wird in aufsteigenden Potenzen von $R_a = \left(\frac{\alpha dy}{dx} + \beta y\right)$ gefunden. Es erfolgen Differenzial-Gleichungen niederer Ordnung, oder blosse algebraische Gleichungen, wenn z. B. $\alpha = 0$ ist, so dass $Ra = \beta y$ wird. Man hat dann entweder unendliche Reihen zwischen x und y; oder wenn die Reihen bei einem bestimmten Gliede hinreichende Näherungswerthe geben, und abgebrochen werden, so erhält man Gleichungen zwischen x und y, die transformirte, aber nicht identische, sondern bloss näherungsweise mit der Differenzial-Gleichung übereinstimmende sind.

Bricht man die Reihe mit dem zweiten Gliede ab, d. h. bildet man: $y = y_a + \frac{Ra}{\vartheta' a}$, oder $\psi y = \psi + \frac{\psi'}{\vartheta' a} Ra$, so folgt ein genäherter Werth, der in Operationen gefunden wird, die der bekannten Newton'schen Methode der näherungsweisen Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen analog sind.

Für die Differenzial-Gleichung $d^n V$ erfolgen n solche transformirte Gleichungen, die den n partikularen Integralen entsprechen, und es ist unmöglich, statt den n partikularen Gleichungen eine einzige allgemeine Näherungs-Gleichung zu bilden, wenn diese etwa versucht werden sollte.

Hauptsache ist, dass man in allgemeiner Methode die wirklichen Näherungswerthe herstellen kann. Hiebei wird anders verfahren werden müssen, als bei algebraischen Gleichungen, für die man das natürliche Hilfsmittel der Zahlen-Reihe hat. Man weiss z. B. dass eine reelle Wurzel einer Gleichung zwischen zwei Zahlen, μ und $\mu + 1$, liegt, von denen die

eine einen positiven, die andere einen negativen Rest der Gleichung giebt. Eine solche natürliche Werth-Reihe hat man bei den Differenzial-Gleichungen nicht, und es finden bei ihnen andere Bestimmungen für die oberen und unteren Grenzen der Integrale statt.

Es ist daher nothwendig, dass sowohl durch directe Ableitung, als durch die bestimmten Integrale die Reihen bekannter Differenzial-Gleichungen gebildet werden, weil sie Marksteine und Anhaltspunkte der näherungsweisen Integration sind, und Analogieen des Coefficientenbaues geben, aus denen auf die Form der genäherten Integrale geschlossen werden kann.

So ist es z. B. möglich, Differenzial-Gleichungen zu construiren von der Form: $d^2y + \frac{adydx}{x} - b^2ydx^2 = 0$ in denen a gleich 2 oder überhaupt eine gerade Zahl ist, nicht aber solche, in denen $a = 1$, $a = 3$, oder eine ungerade Zahl ist. Wohl aber kann man z. B. die Differenzial-Gleichung: $d^2y + \frac{3dydx}{x} - b^2yx^2dx^2 = 0$ construiren, in welcher zwar der Coefficient des zweiten Gliedes gleich 3, aber das dritte Glied nicht b^2ydx^2 sondern $b^2yx^2dx^2$ ist. Es ist daher zu entscheiden, ob eine gegebene Differenzial-Gleichung: $d^2y + \frac{3dydx}{x} - b^2ydx^2 = 0$ genäherte Integrale von der Form der ersten, oder der zweiten Gleichung hat. Ueberdiess sind die Reste der Differenzial-Gleichungen nicht constante Grössen, sondern Functionen der Veränderlichen und ihrer Differenzialien, die für verschiedene Werthe der Veränderlichen convergente oder divergente Reihen liefern u. s. w., wonach sich das jedesmalige Verfahren richten muss.

Die Methode, die wirklichen Näherungswerthe zu ermitteln, gehört wesentlich zur Theorie selbst, und liegt ausser den Grenzen gegenwärtiger Untersuchung.

IX.

Schluss.

Der Integral-Calcul ist durch die grossen Entdecker, Newton und Leibnitz, und durch ihre Nachfolger, die beiden Bernoulli und Euler, in raschem Fortschritt zur Höhe allgemeiner Durchbildung gelangt, worauf sich statt der fortschreitenden Richtung eine andere, mehr ausfüllende und erweiternde, die Bearbeitung der speciellen Untersuchungen, geltend machte, die schon durch Euler eingeleitet war, der mitten in seinen allgemeinen Lehrsätzen der Integral-Rechnung, auf die speciellen Gebiete des Integral-Logarithmus, der Gamma-Function und der elliptischen Integrale aufmerksam machte, und sie zum Theil in ersten Angriff nahm.

Die beiden Richtungen, die elementar und allgemein fortschreitende, und die nachholende, gewissermassen in die Breite ausschreitende, haben gleiche Berechtigung und gleichen theoretischen Werth, in so weit sie einer und derselben Wissenschaft dienen. Die Frage ist nur, ob im ersten grossen allgemeinen Fortschritt das Ziel der Wissenschaft erreicht worden ist, oder nicht. Ist das Erstere der Fall, dann haben die speciellen Untersuchungen von nun an allein Berechtigung, denn sie geben der Wissenschaft, die in grossen allgemeinen Umrissen ein für allemal abgeschlossen ist, die nothwendige Ausfüllung, Bereicherung und Vollendung. Ist aber das Letztere der Fall, dass im ersten grossen Aufschwung das Ziel der Wissenschaft

nicht ganz erreicht worden ist, dann haben die *speciellen* Untersuchungen nur mehr bloss relative Wichtigkeit, denn sie bereichern ja nur das Gebiet, das zufällig begrenzt und abgeschlossen worden ist, nicht das ganze mögliche Gebiet der Wissenschaft, und es stehen ihnen nur die bisher ermittelten Methoden, nicht aber die möglichen Methoden der Wissenschaft zu Gebote.

Ist es der Fall, dass der erste Aufschwung das Ziel nicht erreicht hat, dass er an einem Punkte stehen bleiben musste, über den er mit den vorhandenen Hilfsmitteln nicht hinauskommen konnte, dann bleibt immer die ernste Forderung an die Wissenschaft, die allgemeine elementare und dem Ziele zuführende Richtung der Forschung zu erneuern und in lebendigen Fluss zu bringen, während im andern Falle, wenn das Ziel im Allgemeinen schon erreicht wäre, diese Forderung wegfallen und der fleissigen Bearbeitung des in unermesslicher Fülle vorhandenen Einzelnen Platz machen müsste.

Daher war zu untersuchen, wie sich denn die Sache wirklich verhalte. Demgemäss wurde im II. Abschnitt das Criterium der Integrabilität in ernstlicheren Angriff genommen, als bisher geschehen war. Dabei ergab sich naturgemäss die Gleichung: $N - dP + d^2Q - d^3R + .. = 0$, die Euler im Variations-Calcul gefunden hatte, und die sich im Grunde theilweise schon von Newton herschreibt, mit der man aber bisher nichts anzufangen wusste. Diess kam daher, weil sie einerseits aus ganz fremdartigen, und man darf sagen, abenteuerlichen Betrachtungen der Variations-Rechnung hergeleitet wurde, und weil andererseits die Hauptsache, der Rest nämlich, der nach partieller Integration übrig bleibt, wenn die Gleichung der Integrabilität, die gleich Null ist, ausfällt, ein Rest, der sogleich das Integral selbst giebt, im Variations-Calcul, sowohl von Euler als von La Grange, falsch gedeutet, und darum im Integral-Calcul in gar keine weitere Beachtung gezogen wurde. Dieser Rest, das wirkliche Integral, ist aber gerade die Hauptsache, während die Gleichung der Integrabilität: $N - dP + d^2Q - .. = 0$ nur eine unbestimmte Anweisung zur möglichen Integration ist. Diess Criterium wurde daher, weil es bisher nichts geleistet

hatte, von der neuern Wissenschaft verlassen, und man kann sohin von ihr sagen, dass sie beim Aufbau des Systems den Eckstein bei Seite gesetzt hat.

Schon durch diess Resultat ist festgestellt, dass die Wissenschaft der Integration, weil ihr die Grundlage fehlt, in ihrem allgemeinen Theile nicht vollendet sein könne. —

Wird nun ferner mit der Differenzial-Gleichung $d^n V$ der integrirende Factor φ verbunden, so entsteht aus dem Criterium der Integrabilität, einerseits die integrirende Gleichung $d^n \Phi$, und andererseits der Rest, aus welchem $d^{n-1} V$ also das Integral von $d^n V$ abgeleitet wird, was das Wichtigste ist. Durch einen zweiten integrirenden Factor wird $d^{n-2} V$ gefunden und zuletzt dV und V, in welcher das totale Differenzial sämmtliche n partikulare Integrale zugleich enthält, die demnach nicht wie die Wurzeln algebraischer Gleichungen bei der Reduction auf niedrigere Grade ausfallen, sondern der Reihe nach erhalten bleiben. Diese Integrations-Methode kann sogleich ausgeführt werden, wenn die n partikularen Integrale von $d^n \Phi$ bekannt sind.

Aber auch unabhängig von der wirklichen Ausführung der Integration ergeben sich theoretische Resultate, von denen wir folgende hervorheben:

1) Jede Differenzial-Gleichung des n^{ten} Grades hat n integrirende Factoren, ein Lehrsatz, den La Grange in seiner ganzen XIII. Vorlesung über die Theorie der Functionen durchzuführen suchte. Aus $d^n \Phi$ folgt nicht bloss, dass sie möglich sind, sondern man hat sie sogleich vollständig, sie sind nämlich die n partikularen Integrale dieser Gleichung.

2) Die partikularen Integrale von $d^n V$ und $d^n \Phi$, y und φ haben bestimmte Relationen zu einander, z. B. $y\varphi = c$, $y\varphi = c_{,}x^{-1} + c_{,,}x^{-2} + \ldots$ Sind diese bekannt, so kann eine Differenzial-Gleichung unmittelbar auf eine um einen Grad niedrigere Gleichung gebracht werden.

3) Die Gleichung $d^n \Phi$ liefert die Mittel, den wichtigen und fundamentalen Satz zu beweisen, dass die allgemeinen

linearen Differenzial-Gleichungen von höherem als erstem Grade nicht allgemein integrirt werden können, und dass nicht Mangel an Hilfsmitteln, sondern die Natur der Sache, das Wesen der Differenzial-Gleichungen, die allgemeine Integration ausschliesst. Dadurch wird der Wissenschaft ihr Ziel, und auch die Methode, diess Ziel zu erreichen, aufs Bestimmteste vorgezeichnet; es bleibt nichts mehr einem blossen glücklichen Zufall überlassen. So wie die algebraischen Gleichungen successiv durch ihre Factoren aufgelöst werden, so müssen auch die Differenzial-Gleichungen durch die partikularen Integrale successiv integrirt werden, so dass die zuletzt erfolgende Gleichung, das totale Integral, die Summe sämmtlicher partikularer Integrale enthält; und diess ist so natürlich, dass es im Grunde nicht anders erwartet werden konnte.

Die integrirende Gleichung $d^n \Phi$ füllt einerseits eine Lücke der Integration aus, und steht mit der gegebenen Gleichung $d^n V$ ganz und gar in einer Linie; denn wenn diese die Reihe der Probleme darstellt, so repräsentirt erstere die Reihe der Auflösungen, ohne die man den Problemen ziemlich hilflos gegenübersteht, namentlich wenn die partikularen Integrale eine Beziehung zu einander haben, die den gleichen Wurzeln algebraischer Gleichungen analog ist; andererseits führt sie zur Theorie der partikularen Integrale, als die von der Wissenschaft gebotene und zum Ziele führende Integrations-Methode.

§ 75.

Für die Construction der partikularen Integrale haben sich nach allseitiger Untersuchung zwei Methoden herausgestellt, eine, die darin besteht, dass aus angenommenen partikularen Integralen Differenzial-Gleichungen construirt werden, wie die Operationen des VI. Abschnittes zeigen, und eine zweite, die umgekehrt aus gegebenen Differenzial-Gleichungen durch die Operationen der bestimmten Integrale die partikularen Integrale ableitet. Die übrigen untersuchten Methoden haben sich als weniger brauchbar erwiesen, etwa die Methode der unbestimmten Coefficienten ausgenommen, deren Resultate jedoch nur dann

von Werth sind, wenn sie durch bekannte Functionen oder durch bestimmte Integrale summirt werden können, so dass auch hier die Integration durch bestimmte Integrale das Entscheidende ist.

Die directe Construction der Differenzial-Gleichungen aus beliebigen Functionen (partikularen Integralen), ist ein bisher unbeachtet gebliebener Theil des Differenzial-Calculs; die Methode der bestimmten Integrale hingegen ist ein von Euler eingeführter und seitdem sehr ausgebildeter Theil des Integral-Calculs, der zu den grössten Errungenschaften der Integration gerechnet werden kann.

Wie gezeigt worden ist, stimmen beide Methoden in ihren Operationen wesentlich überein, und was sie unterscheidet, ist Folgendes: In der directen Construction der Differenzial-Gleichungen geht man von einem partikularen Integrale aus, z. B. $y = x^{\nu} e^{\lambda x}$, und construirt aus ihm Differenzial-Gleichungen jeden Grades; bei der Methode durch bestimmte Integrale geht man von einer Gleichung eines bestimmten Grades aus, und ermittelt durch willkührliche Voraussetzung eines möglichen partikularen Integrals, (dessen Form man theilweise aus dem Coefficientenbau der gegebenen Gleichung diviniren muss, z. B. $y = \int e^{ux} V du$), die wirklichen und durch u und V bestimmten partikularen Integrale. Die erstere Methode umfasst Differenzial-Gleichungen ganz verschiedener Grade durch ein und dasselbe partikulare Integral; aber da dieses nur wenige willkührliche Constanten enthält, werden die immer zahlreicheren Coefficienten der Differenzial-Gleichungen höherer Ordnung immer bestimmter und abhängiger, und liefern statt allgemeiner Probleme bloss Beispiele, während die zweite Methode nur eine Differenzial-Gleichung eines bestimmten Grades behandelt, aber dafür den Vortheil hat, dass die in der Differenzial-Gleichung enthaltenen willkührlichen Constanten, a, b, c ... allgemein bleiben, und durch entsprechende bestimmte Integrationen ermittelt werden.

Beide Methoden ergänzen sich demnach, und die Resultate der bestimmten Integration machen uns aufmerksam, dass wir bei

der directen Construction der Differenzial-Gleichungen, nicht bloss von einfachen Factoren, z. B. $y = e^{\lambda x} x^{\nu}$, sondern von zusammengesetzten ausgehen müssen, z. B. $y = e^{\lambda x}(x^{\nu} + \alpha x^{\pi} + \beta x^{\sigma} + ..)$, wenn Differenzial-Gleichungen erfolgen sollen, deren Constanten a, b, c .. einen grösseren Spielraum haben. Andererseits zeigt die directe Construction durch den Coefficientenbau ihrer Gleichungen, welche mögliche Form des partikularen Integrals die Methode der bestimmten Integrale vorauszusetzen habe, um nicht mehr auf blosse Divination angewiesen zu sein.

Wie gross nun auch die Resultate dieser Methoden sein mögen, so bleibt doch die näherungsweise Integration, als die allein und allgemein durchgreifende übrig, und ihr fällt die Hauptaufgabe der Wissenschaft zu, wie diess überall der Fall ist; denn auch bei algebraischen Gleichungen ist die näherungsweise Auflösung die letzte und allgemein durchgreifende.

Sind die Differenzial-Gleichungen so weit umgebildet und vorbereitet, dass man partikulare Integrale als wirkliche Näherungswerthe aufstellen kann, dann geben die schönen Reihen des VIII. Abschnitts das wahre Integral in beliebiger Annäherung; aber es muss, für jedes partikulare Integral eine eigene Reihe construirt werden, wie es die Natur der Sache verlangt, da ein Näherungswerth des einen Integrals nicht zugleich auch ein Näherungswerth des andern sein kann. Bei den meisten wirklichen Problemen handelt es sich jedoch meistens nur um das eine oder andere Integral.

Zur Umwandlung und Vorbereitung der Differenzial-Gleichungen, dass sie endlich näherungsweise berechnet werden können, dienen vornehmlich:

1) Die integrirende Gleichung $d^n\Phi$, die mehr leistet, als alle bisher versuchten Transformations-Methoden;

2) die Gleichungen, die zwischen den integrirenden Factoren y und φ stattfinden. Diese sind nun freilich noch unausgebildet, doch haben sich einige herausgestellt, wie $y\varphi = c$, $y\varphi = cx^{-1}$ u. s. w. Ist nun für eine gegebene Differenzial-Gleichung d^nV die entsprechende Gleichung: $y\varphi = \chi$ gegeben,

so wird durch Differenzirung $d^n(y\varphi) = d^n\chi$ eine Gleichung des n^{ten} Grades hergestellt, in der $d^n y$, $d^n\varphi$; $d^{n-1}y$, $d^{n-1}\varphi$ &c. enthalten sind. Werden mit Hilfe von $d^n\Phi$, die Functionen φ und ihre Differenzialien eliminirt, so erfolgt eine transformirte Gleichung zwischen y und ihren Differenzialien, die durch $d^n V$ um einen Grad erniedrigt werden kann. U. s. w.

Die obere und untere Grenze der Näherung geben dann die durch die partikularen Integrale construirten Differenzial-Gleichungen, wobei zwischen positiven und negativen Veränderlichen, zwischen, x grösser oder kleiner als a, unterschieden werden muss, gerade wie bei bestimmten Integralen. Es unterliegt daher keinem Zweifel, dass die Integral-Rechnung als Wissenschaft systematisch durchgeführt werden kann, und dass die Hilfsmittel dazu vorbereitet sind. Zwar erstrecken sich die gefundenen Resultate meistens nur auf die linearen Differenzial-Gleichungen; aber diese sind ein so wesentlicher, ja fundamentaler Theil der Differenzial-Gleichungen überhaupt, dass die hier gefundenen Resultate für alle übrigen Theile dieses weitverzweigten Calculs massgebend sind, wie ja sowohl das Criterium der Integrabilität, als auch die Construction der partikularen Integrale, allgemein für alle Differenzial-Gleichungen gelten.

Die Ausführung ist Sache der Theorie, nicht der Prolegomena, die ja nicht die Wissenschaft selbst sind, sondern ihr nur die Wege bereiten sollen, und in der Erfüllung dieser Aufgabe ihr Ziel finden.

§ 76.

Die neuere Analysis hat vor der älteren den Vorzug, dass sie die Bedingungen der Gültigkeit analytischer Formeln aufs Genaueste hervorhebt und bezeichnet. Es werden die Bedingungen der absoluten und relativen Convergenz der Reihen, die Grösse der Reste und die wahrscheinliche Differenz des exacten und des näherungsweise gefundenen Werthes bestimmt bezeichnet, so dass jedes Resultat in seiner ganzen Gliederung und Vollständigkeit vors Auge tritt, und nichts einem bloss ergänzenden Verständniss überlassen wird. Diese reine und

gründliche Durchbildung der Resultate ist ein grosser Vorzug, obwohl auch ohne Zweifel die älteren Mathematiker, was die Resultate betrifft, dasselbe im Sinne hatten, und nur die bestimmte Herausstellung und Bezeichnung unterlassen haben.

So anerkennenswerth nun diese Richtung nach gänzlicher Abrundung in Form und Bezeichnung ist, so kann sie doch zu einer Art von Gründlichkeit führen, die nicht anerkennenswerth ist. Ich erkläre mich durch ein Beispiel: Wenn Jemand beim Beginn der Geometrie gefunden hätte, dass es Dreieke giebt, bei denen das Quadrat der grösseren Seite gleich ist der Summe der Quadrate der kleineren Seiten, dann den Lehrsatz aufgestellt haben würde, dass diess von allen Dreiecken gelte, so wäre diess unstreitig falsch gewesen. Würde er später Bedingungen aufstellen, unter denen dieser Satz gelte, aber immer noch das Subject des Satzes beibehalten, dass diess von allen Dreiecken gelte, jedoch nur mit dieser und jener Einschränkung, so kann diess ebenfalls falsch sein. Denn wenn der Fehler eines Satzes im Subject ist, und man verbessert das Prädikat statt des Subjects, so wird trotz alles Scheines der Gründlichkeit ein falscher Satz dadurch noch nicht zu einem wahren. Nur wenn er vom Anfange an richtig gebildet ist, dann gilt er ohne alle Einschränkungen, und ohne alle Bedingungen, und diess ist das Criterium jeder objectiven Wahrheit, dass sie bedingungslos und schrankenlos gilt. Ja durch solche nähere, gründliche Bedingungen, wenn sie an unrechter Stelle angebracht sind, ist Gefahr gegeben, dass der Irrthum halbwahrer Sätze, der sogleich beseitigt werden könnte, wenn er bedingungslos ausgesprochen würde, durch die einschränkenden und verhüllenden Bedingungen geschützt, gleichsam apotheosirt, und als Wahrheit von Geschlecht zu Geschlecht fortgepflanzt wird, und nicht mehr leicht beseitigt werden kann. Diess findet sich im Differenzial-Calcul so gut, wie im Integral-Calcul, und in andern Theilen der Wissenschaft. Um Naheliegendes zu berühren, so haben wir erkannt, dass die Umkehrungs-Reihen nur partikulare Reihen für Näherungswerthe sind; werden sie als solche proclamirt, so gelten sie ganz unbedingt und allge-

mein. Nimmt man aber die partikulare Reihe als die absolute und vollständige Reihe, wie La Grange, La Place und ihre Nachfolger gethan haben, dann kann man viele gründliche Einschränkungen, Bedingungen und Bezeichnungen anbringen, man wird aber doch nicht zur Wahrheit gelangen, so lange man das falsche Subject festhält, dass sie vollständige Reihen sind. Nur wenn diess geändert, wenn radical geholfen wird, dann hat man den allgemein gültigen Lehrsatz, aber auch ohne alle Einschränkung, Bedingung und Bezeichnung. Dieselben Bemerkungen gelten, wenn man etwa einen Näherungswerth einer Gleichung des n^{ten} Grades für den absoluten Näherrungswerth aller n partikularen Integrale nimmt, was durch keinerlei nachfolgende Bedingungen gut gemacht werden kann. Hier hilft keine Vorsicht und keine Behutsamkeit; die Correctur muss da angebracht werden, wo sie hingehört, man muss aussprechen, dass der substituirte Werth nur Näherungs-Werth eines einzigen partikularen Integrals ist.

Noch auffallender sind solche unrichtig angebrachten Correcturen da, wo man sich z. B. Mühe giebt, die Differenzialien, die ganz gewöhnliche, endliche Grössen sind, als unendlich kleine Grössen zu schirmen, weil sie anfangs aus Noth so genommen werden mussten, oder die Variationen, die nichts anderes, als gewöhnliche partielle Differenzialien sind, als Grössen eigener Art festzustellen, weil Euler und La Grange nicht im Stande waren, sie anders zu behandeln.

Wohl ist es nicht anders möglich, als dass im Beginn einer jeden Wissenschaft subjective und objective Erkenntniss, Gerüste und Bau, miteinander fortgeführt werden, bis der Bau vollendet ist und das Gerüste abgebrochen werden kann; aber man muss dennoch beides, Gerüste und Bau, aufs Schärfste trennen und unterscheiden. Nur subjectiv gebildete Lehrsätze, die nicht volle objective Wahrheit haben, bedürfen der schützenden Bedingungen und Einschränkungen; die objectiven Wahrheiten brauchen und dulden diess nicht.

Im subjectiven Theile der Erkenntniss ist die schärfste und gründlichste Critik angezeigt; die Vernunft kann niemals

zu viel Critik gegen sich selbst üben, wenn es ihr möglich werden soll, aus unvollkommner Erkenntniss zur vollkommenen zu gelangen. So oft daher die Bedingungen der Gültigkeit einer Wahrheit subjectiv gefasst sind, ist die schärfste Hervorhebung und Bezeichnung geboten, und wird auch als Beweis gründlicher und reiner Durchführung der Probleme anzuerkennen sein. Nur das ist abzuwehren, dass man die Bedingungen der subjectiven und unvollkommenen Auffassung für Eigenschaften der vollkommenen objectiven Wahrheit nimmt und ausgiebt.

So oft ein schlechthin allgemeiner Lehrsatz gebildet und bewiesen werden kann, ist es ein Zeichen, dass in diesem Punkte die subjective Erkenntniss mit der objectiven Wahrheit zusammentrifft, was die Vollendung der Wissenschaft ist.

Inhalt.

Seite

erner.